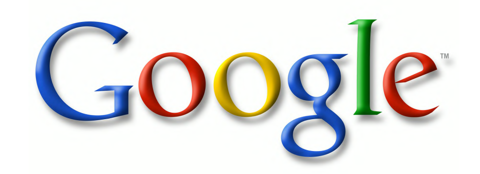



niversity Libraries
025 500 914






B. WESTERMANN & CO.
NEW YORK
812 BROADWAY.

STATIQUE EXPÉRIMENTALE ET THÉORIQUE

DES LIQUIDES

SOUMIS AUX SEULES FORCES MOLÉCULAIRES.

Gand, imp. C. Annoot-Braeckman.

STATIQUE

EXPÉRIMENTALE ET THÉORIQUE

DES LIQUIDES

SOUMIS

AUX SEULES FORCES MOLÉCULAIRES,

PAR

J. PLATEAU,

Professeur à l'Université de Gand,
Membre de l'Académie Royale de Belgique, Correspondant de l'Institut de France,
de la Société Royale de Londres, de l'Académie de Berlin, etc.

TOME PREMIER.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS,
quai des Augustins, 55.

LONDRES,
TRÜBNER ET Cie,
Ludgate Hill, 57 et 59.

GAND ET LEIPZIG : F. CLEMM.

1873.

H

A MONSIEUR A. QUETELET,

DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE DE BRUXELLES, ETC.

Vous, qui avez été l'un des actifs promoteurs de la régénération intellectuelle de la Belgique, et dont les travaux ont tant contribué à l'illustration de ce pays; vous, qui avez guidé mes premiers pas dans la carrière des sciences, et qui m'avez appris, par votre exemple, à exciter chez les jeunes gens l'amour des recherches; vous enfin, qui n'avez cessé d'être pour moi un ami dévoué, permettez-moi de vous dédier cet ouvrage, en témoignage de reconnaissance et de constante affection.

J. PLATEAU.

Cet ouvrage est formé essentiellement du contenu des onze Séries que j'ai publiées, de 1843 à 1868, dans les Mémoires de l'Académie de Belgique, sous le titre : *Recherches expérimentales et théoriques sur les figures d'équilibre d'une masse liquide sans pesanteur*[1]. Mais la révision de l'ensemble de ces Séries m'a permis de suivre, dans l'ouvrage actuel, un ordre un peu plus méthodique, de rectifier quelques passages, et de combler des lacunes, surtout dans les historiques ; j'ai pu étendre ceux-ci jusqu'à la fin de 1869, et j'en ai fait deux nouveaux, l'un relatif à la viscosité superficielle des liquides, l'autre à la constitution des veines liquides ; j'ai introduit plusieurs additions qui me paraissent dignes d'intérêt, telles que la théorie de l'explosion des bulles laminaires ; d'un autre côté, j'ai supprimé, comme concernant des phénomènes purement dynamiques, la plupart des résultats de ma première Série ; enfin j'ai indiqué, dans un dernier paragraphe, les titres des articles qui ont paru après 1869 sur des sujets en rapport avec ceux que je traite.

(1) La première Série porte le titre un peu différent : ***Mémoire sur les phénomènes que présente une masse liquide libre et soustraite à l'action de la pesanteur, première partie.***

STATIQUE DES LIQUIDES

SOUMIS

AUX SEULES FORCES MOLÉCULAIRES

CHAPITRE PREMIER.

Notions préliminaires. Condition générale à laquelle doit satisfaire, dans l'état d'équilibre, la surface libre d'une masse liquide supposée sans pesanteur. — Procédés pour soustraire un liquide à l'action de la pesanteur, en le laissant libre, soit sur toute sa surface, soit sur une partie de celle-ci, d'obéir à ses propres attractions moléculaires. Emploi du premier procédé : sphère liquide; vérifications expérimentales des principes de la théorie de l'action capillaire. — Figures terminées par des surfaces planes : polyèdres liquides.

§ 1. On sait que, dans les circonstances ordinaires, la surface libre d'un liquide en repos, quand elle a une étendue assez grande, est plane et horizontale, excepté vers ses bords; mais on sait, en même temps, que cette forme plane et horizontale est un effet de la pesanteur, et que, entre des limites resserrées, la surface libre peut affecter des formes très-différentes, parce qu'alors l'action de la pesanteur devient du même ordre que les actions moléculaires : c'est ce qui a lieu, par exemple, au sommet de la colonne liquide soulevée ou abaissée dans un tube capillaire. On comprend, d'après cela, que si les

liquides étaient dépourvus de pesanteur, leur surface libre pourrait avoir, à l'état de repos, et sur une étendue quelconque, des formes tout autres que la forme plane horizontale, et c'est, en effet, à quoi l'on arrive par le calcul, comme nous allons le voir.

Il résulte du travail de Laplace sur l'action capillaire, que les liquides exercent sur eux-mêmes, en vertu de l'attraction mutuelle de leurs molécules, une pression normale à la surface en chaque point; que cette pression peut être regardée comme émanant d'une couche superficielle ayant une épaisseur égale au rayon d'activité sensible de l'attraction moléculaire et, par suite, extrêmement petite ; enfin que cette même pression dépend des courbures de la surface au point considéré, et que si l'on désigne par P la pression, rapportée à l'unité de surface, qu'exerce une surface plane, par A une constante, et par R et R′ les rayons de courbure principaux, c'est-à-dire ceux de la plus forte et de la plus faible courbure de la surface en un même point, la pression correspondante à ce point a pour valeur, toujours rapportée à l'unité de surface,

$$P + \frac{A}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \cdots \qquad [1]$$

Dans cette formule, les rayons R et R′ sont positifs lorsqu'ils appartiennent à des courbures convexes, ou, en d'autres termes, lorsqu'ils sont dirigés à l'intérieur de la masse, et ils sont négatifs lorsqu'ils appartiennent à des courbures concaves, c'est-à-dire lorsqu'ils sont dirigés à l'extérieur; quant aux quantités P et A, elles ne changent qu'avec la nature du liquide.

Cela étant, concevons une masse liquide dépourvue de pesanteur ; les pressions émanées des différents points de sa couche superficielle se transmettant des uns aux

autres par le liquide intérieur, il faudra nécessairement, pour qu'il y ait équilibre, que toutes ces pressions soient égales entre elles; il faudra donc que l'expression ci-dessus ait une valeur constante à l'égard de toute la surface; et comme les quantités P et A sont elles-mêmes constantes, on exprimera la condition générale de l'équilibre en posant simplement :

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = C, \ldots\ldots \qquad [2]$$

la quantité C étant constante, et pouvant d'ailleurs être positive, négative ou nulle.

Précisons davantage pour les personnes auxquelles la théorie des surfaces est peu familière. En un point pris arbitrairement sur une surface quelconque, imaginons une normale à celle-ci, et par cette normale faisons passer un plan; il coupera la surface suivant une certaine ligne, et le rayon de courbure de cette dernière, au pied de la normale, sera l'un de ceux de la surface en ce point. Faisons maintenant tourner le plan autour de la normale; dans chacune de ses positions, il déterminera une nouvelle ligne, et, par suite, un nouveau rayon de courbure; or, parmi tous ces rayons, il y en aura, en général, un qui appartiendra à une courbure plus forte, et un à une courbure plus faible que toutes les autres; ce sont nos deux rayons principaux R et R', et les quotients $\frac{1}{R}$ et $\frac{1}{R'}$ sont les deux courbures principales au point considéré. Ajoutons que, d'après un résultat curieux de l'analyse, les deux sections auxquelles appartiennent ces courbures principales sont toujours à angle droit l'une sur l'autre.

Ainsi, en vertu de la formule [2], une masse liquide supposée sans pesanteur doit affecter une figure telle

que la somme algébrique des deux courbures principales ait la même valeur en tous les points de sa surface. Chacune de ces courbures principales est d'ailleurs, d'après ce qui précède, positive ou négative suivant qu'elle est convexe ou concave.

Remarquons encore que lorsqu'il y a, en un même point de la surface, des courbures convexes et des courbures concaves, la courbure principale de cette dernière espèce est la plus faible algébriquement; c'est donc celle qui a la plus grande valeur négative, et conséquemment le plus petit rayon négatif.

Citons enfin un second résultat curieux de l'analyse : Si l'on considère deux sections quelconques à angle droit passant par une même normale, les rayons de courbure qui leur correspondent, rayons que nous nommeront ρ et ρ', seront tels que la quantité $\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}$ sera égale à la quantité $\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}$. Il en résulte que l'on peut substituer la première de ces quantités à la seconde, et que, par conséquent, l'équation de l'équilibre dans sa plus grande généralité sera $\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}=C$.

Si toutes ces notions laissent encore quelque obscurité dans l'esprit du lecteur, elles s'éclairciront par les nombreuses applications que nous aurons à en faire.

Poisson, le seul, je pense, qui, avant mes recherches, ait touché directement à la question générale des figures d'équilibre d'une masse liquide sans pesanteur, était parvenu [1], en 1828, à la formule [2] : après avoir traité

(1) *Mémoire sur l'équilibre des fluides* (Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, t. IX, année 1830, p. 1).

dans toute sa généralité le problème de l'équilibre intérieur d'un fluide sous l'action de ses propres forces moléculaires et de forces étrangères données, il cherche les équations d'équilibre relatives à la surface commune de deux fluides en contact; puis il suppose que l'un d'eux est un liquide, et l'autre un gaz exerçant une pression uniforme; enfin il supprime les forces étrangères, sauf cette pression, et trouve ainsi, à l'égard de la surface de la masse liquide, la formule dont il s'agit.

Il démontre ensuite qu'il n'existe qu'une seule figure d'équilibre possible parmi les sphéroïdes de révolution très-peu différents d'une sphère, et que cette figure est celle de la sphère elle-même.

§ 2. Il est évident, en effet, qu'une surface sphérique satisfait à la formule [2], puisque tous ses rayons de courbure sont égaux. Il est de même évident que le plan, dont tous les rayons de courbure sont infinis, ce qui rend le premier membre de la formule partout égal à zéro, y satisfait aussi, seulement, dans ce cas, la constante C est nulle. Je cite ces deux surfaces parce qu'elles se présentent immédiatement; mais, comme nous l'apprendrons ci-après, elles sont loin d'être les seules.

La constance de la somme algebrique des deux courbures principales n'est pas l'unique interprétation que reçoive la formule [2] :

En premier lieu, les géomètres savent que la quantité $\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}$ est proportionnelle à la courbure moyenne, c'est-à-dire à la moyenne entre toutes les courbures de la surface au point considéré; la formule [2] indique donc aussi que nos surfaces d'équilibre sont celles qui ont la même courbure moyenne en tous leurs points.

L'invariabilité de la courbure moyenne se comprend

d'ailleurs aisément : puisque la pression en chaque point dépend des courbures, il est clair que si la moyenne entre toutes celles-ci ne varie pas d'un point à un autre, l'effet de leur ensemble ne variera pas non plus, et qu'ainsi la pression sera la même en tous les points.

Maintenant, les géomètres savent également que les surfaces à courbure moyenne constante sont en nombre illimité ; un liquide supposé sans pesanteur est donc susceptible d'une infinité de figures d'équilibre.

En second lieu, dans le cas où la constante C est égale à zéro, et où conséquemment la courbure moyenne est nulle, la formule [2] donne :

$$R = -R' ;$$

ainsi les surfaces à courbure moyenne nulle sont telles qu'en chacun de leurs points les deux rayons de courbure principaux sont égaux et de signes contraires ; en d'autres termes, si, en un point quelconque d'une semblable surface, on conçoit les deux sections normales qui présentent en ce point les courbures principales, sections qui, nous le savons, font entre elles des angles droits, l'une de ces deux courbures sera convexe, et l'autre lui sera égale, mais concave. Le plan seul fait une sorte d'exception, parce que toutes ses courbures sont nulles.

Il suit, d'ailleurs, de ce qui a été dit dans le paragraphe précédent, que, ρ et ρ' désignant les rayons de courbure de deux sections quelconques à angle droit passant par une même normale en un point d'une surface à courbure moyenne nulle, on aura toujours aussi $\rho = -\rho'$, et que, par conséquent, si, en un point d'une surface de ce genre, la courbure est convexe dans une certaine direction, elle est nécessairement concave, et au même degré, dans la direction rectangulaire.

En troisième lieu, partant d'un résultat du calcul des variations, les géomètres ont admis que les surfaces satisfaisant à la formule [2] ont une étendue minima. Suivant ce principe, sur lequel nous aurons à revenir, lorsque la constante C a une valeur finie, la surface de la figure serait toujours moindre que toutes les surfaces très-voisines comprenant le même volume et terminées aux mêmes limites, et lorsque la constante C est nulle, la surface serait toujours, d'une manière absolue, c'est-à-dire sans tenir compte du volume compris, moindre que toutes les surfaces très-voisines terminées aux mêmes limites; dans ce dernier cas, les surfaces dont il s'agit sont souvent appelées *surfaces à aire minima*.

Envisagées au point de vue purement mathématique, les surfaces dont nous nous occupons ont été l'objet des recherches de plusieurs géomètres; nous profiterons plus loin des résultats qu'ils ont obtenus; seulement je dirai, dès à présent, que les rayons R et R′ peuvent s'exprimer en fonction des coëfficients différentiels, ce qui convertit la formule [2] en une équation différentielle du second ordre; en faisant $\frac{dz}{dx}=p$, $\frac{dz}{dy}=q$, $\frac{d^2z}{dx^2}=r$, $\frac{d^2z}{dxdy}=s$ et $\frac{d^2z}{dy^2}=t$, cette équation est:

$$(1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs=C(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}; \ldots\ldots \quad [3]$$

elle représente ainsi toutes les surfaces à courbure moyenne constante, et, par suite, toutes les figures d'équilibre qui conviendraient à un liquide sans pesanteur; mais elle n'a pu, jusqu'ici, être intégrée que dans certains cas, et, parmi les surfaces en nombre infini qui y satisfont, il n'y en a qu'une vingtaine, à ma connaissance, dont on ait soit l'équation en coordonnées finies,

soit la détermination par les fonctions elliptiques, soit la génération géométrique.

Disons cependant que les méthodes qu'on a trouvées permettraient certainement, si l'on effectuait les calculs, de dépasser de beaucoup ce nombre.

Présentons encore une remarque : il est indifférent de concevoir le liquide placé d'un côté ou de l'autre d'une surface d'équilibre ; en d'autres termes, toute figure d'équilibre en relief a sa correspondante identique en creux ; par exemple, de même qu'une sphère pleine formée d'un liquide sans pesanteur serait à l'état d'équilibre, du moins dans le vide, de même une sphère en creux dans un liquide sans pesanteur serait également à l'état d'équilibre. En effet, en passant de la figure en relief à la figure en creux, les rayons de courbure R et R′ ne font évidemment que prendre, en chaque point, des signes contraires, sans changer de valeurs absolues, ce qui donne simplement aussi un signe contraire à la constante C, et conséquemment ne détruit pas la condition de l'équilibre.

§ 3. Les résultats trouvés par les géomètres exigeant, pour s'appliquer aux liquides, la condition en apparence impossible d'une pesanteur nulle, semblaient devoir demeurer à l'état d'ingénieuses spéculations, sans signification physique réelle ; mais j'ai fait connaître deux procédés au moyen desquels on peut placer un liquide dans des circonstances telles qu'il se comporte comme s'il ne pesait pas.

Le premier consiste à introduire une masse d'huile d'olive dans un mélange d'eau et d'alcool dont la densité soit exactement égale à celle de l'huile employée. Alors, en effet, l'action de la pesanteur sur la masse d'huile se trouve complétement neutralisée, et comme les deux

liquides ne peuvent se mêler, la masse immergée demeure libre d'obéir aux pressions qui émanent de sa couche superficielle; aussi, quand elle n'est adhérente à aucun solide, elle se façonne, quel que soit son volume, en une sphère parfaite, qui reste suspendue au sein du liquide ambiant. J'ai réalisé de cette manière des sphères exactes ayant jusqu'à 14 centimètres de diamètre(1).

Le second procédé permet de produire les figures d'équilibre dans l'air; il repose sur un principe que nous

(1) Depuis la publication de mes premières Séries, j'ai reconnu que deux savants déjà anciens avaient approché bien près de ce procédé.

En 1676, Boyle (Philos. Transact., vol. XI, pp. 775 et 779), partant du fait que les gouttes de pluie et de rosée ont une figure arrondie, et remarquant que ces gouttes, environnées d'air, sont formées d'un fluide dans un autre fluide, se propose d'essayer ce qui arrive à des gouttes d'un liquide immergées dans un autre liquide avec lequel elles ne se mêlent pas. A cet effet, il introduit dans un flacon une couche d'une solution concentrée de carbonate de potasse, et, par dessus, une quantité suffisante d'alcool également concentré; puis il laisse tomber dans ce dernier liquide des gouttes d'essence de térébenthine, et il voit ces gouttes, qui ne se dissolvent pas immédiatement dans le liquide ambiant, descendre à travers celui-ci et venir se poser, avec une figure sensiblement sphérique, sur la surface du liquide alcalin; il constate que la sphéricité commence à paraître altérée quand une goutte formée de la réunion de plusieurs autres atteint environ un tiers de pouce en diamètre. Il verse ensuite des gouttes d'eau dans de l'essence de girofle, liquide dont la densité est fort peu supérieure à celle de l'eau, et ces gouttes, qui gagnent le haut du liquide ambiant, lui montrent de même une forme très-voisine de la sphère quand elles sont petites, et légèrement aplatie quand elles atteignent à peu près le double de la grosseur d'un pois.

En second lieu, Segner, dans un Mémoire publié en 1751 (Commentar. Götting., vol. I), et intitulé : *De figuris superficierum fluidarum*, s'exprime ainsi :

« Si un liquide tombe librement dans un milieu non résistant, l'action due au poids des portions supérieures sur celles qui les précèdent est complétement nulle. Et si deux liquides sont donnés non susceptibles de se mêler et de densités parfaitement égales, et que l'on verse une petite quantité de l'un d'eux dans un vase contenant une quantité plus grande de l'autre, le poids du premier sera soutenu par la pression du second de telle manière que celui-ci ne pourra exercer aucune action pour conserver ou pour changer la figure du liquide immergé. La goutte qui tombe, ou la goutte immergée comme nous venons de le dire,

démontrerons rigoureusement plus loin, mais que nous pouvons faire comprendre dès à présent : concevons une lame liquide très-mince, une lame d'eau de savon, par exemple ; à cause de sa ténuité, cette lame n'a qu'une masse extrêmement petite, de sorte que l'action de la pesanteur y est négligeable en présence des pressions capillaires qui émanent des couches superficielles (§ 1) des deux faces ; chacune de ces faces tend conséquemment à prendre une figure satisfaisant à la formule [2] ; et comme l'une d'elles est en creux ce que l'autre est en relief, il suit de la remarque qui termine le paragraphe précédent que l'équilibre de la seconde entraîne celui de la première, et qu'ainsi la forme d'équilibre d'une semblable lame est nécessairement, sans différence appréciable, l'une de celles qu'affecterait la surface libre d'une masse liquide pleine dépourvue de pesanteur. Les bulles de savon, par exemple, lorsqu'elles flottent isolées dans l'air, ont, chacun le sait, une figure sphérique, comme la masse d'huile immergée dans notre alcool dilué.

§ 4. Revenons au premier procédé. Avant de l'employer à la réalisation des figures d'équilibre, décrivons l'appareil et les préparations nécessaires aux expériences. Si l'on opérait dans un flacon, la réfraction altérerait l'aspect des figures produites, elle les montrerait élargies dans le sens horizontale ; il faut donc se procurer un vase à parois planes en verre à glace. Ce qui m'a paru le plus convenable est de donner à ce vase la

prendra donc identiquement la même figure qu'une goutte qui serait sans pesanteur. »

Segner se borne à énoncer ce principe, il n'en essaie pas l'application, et n'en tire aucun parti.

Ajoutons que, dans le même travail, il est conduit, par une théorie dont nous parlerons plus loin, à la conséquence qu'une masse liquide finie et sans pesanteur devrait prendre la figure sphérique.

forme d'un cube de 20 centimètres de côté; les glaces qui en constituent les faces latérales et le fond sont mastiquées dans un châssis en fer. Quant au couvercle, il consiste en une autre plaque de verre de mêmes dimensions que les premières, et qu'on pose simplement sur le haut du vase. Cette plaque couvercle est percée, en son milieu, d'une large ouverture circulaire garnie d'un goulot en fer qu'on ferme au moyen d'un bouchon de même métal; celui-ci est traversé à frottement doux, suivant son axe, par une tige cylindrique en fer (1) d'environ 15 centimètres de longueur et 5 à 6 millimètres d'épaisseur, tige dont l'extrémité supérieure porte un bouton qui permet de la saisir aisément, et dont l'extrémité inférieure est creusée en écrou dans le sens de l'axe, afin qu'on puisse y visser des pièces que nous indiquerons. Le bord supérieur du vase est usé à l'émeri; de cette façon, lorsque le couvercle est placé, l'alcool du mélange intérieur ne peut s'évaporer. Enfin l'appareil est muni de vis calantes, et d'un robinet pour laisser écouler les liquides.

Nous devons signaler, dès maintenant, deux causes qui tendent à apporter du trouble dans les expériences, et contre lesquelles il faut se mettre en garde autant que possible.

§ 5. Occupons-nous d'abord de la première. Supposons que, par une manœuvre dont nous parlerons bientôt avec détail, on ait obtenu une belle sphère d'huile en équilibre parfait de densité dans le mélange alcoolique. Cet équilibre ne tarde pas à s'altérer: après

(1) J'indique le fer et non le cuivre, pour toutes les parties métalliques de l'appareil, parce qu'il s'agit d'employer de l'huile, et que ce liquide n'enlève rien au fer, tandis que, dans un contact prolongé avec le cuivre, il attaque légèrement celui-ci, prend une couleur verte, et, ce qui est un grave inconvénient, augmente de densité.

quelques minutes, on voit la sphère quitter sa place, et monter avec une extrême lenteur. Si l'on ajoute alors au liquide ambiant un peu d'alcool pour rétablir l'équilibre, celui-ci est encore rompu de la même manière au bout d'un certain temps; il faudrait continuer pendant deux ou trois jours à le maintenir par l'addition successive de petites quantités d'alcool, pour le rendre enfin sensiblement permanent. C'est que l'huile absorbe en assez grande proportion l'alcool du mélange en contact avec elle, et devient moins dense, tandis que le mélange, qui perd ainsi de son alcool, augmente, au contraire, de densité. Ajoutons que, de son côté, le mélange alcoolique dissout un peu d'huile, ou plutôt de l'oléine qui fait partie de l'huile.

§ 6. On conçoit, d'après cela, qu'il est indispensable de n'employer les deux liquides que rendus, par une saturation mutuelle, à peu près inertes l'un à l'égard de l'autre. Voici, pour atteindre ce but, le moyen que je crois le meilleur :

On commence par faire, dans un grand flacon, un mélange d'alcool et d'eau distillée marquant 22° à l'aréomètre de Beaumé; on y ajoute, si cela est nécessaire, une certaine quantité d'alcool, de façon qu'en introduisant dans le liquide, à l'aide d'un entonnoir, une petite masse d'huile, celle-ci descende lentement au fond. On verse alors, par le même entonnoir, une quantité d'huile telle qu'elle pourrait constituer une sphère de 7 à 8 centimètres de diamètre, puis, après avoir bouché le flacon, on le retourne assez rapidement un grand nombre de fois, mais sans le secouer, jusqu'à ce que l'huile ait été divisée en sphérules de quelques millimètres de diamètre, et on laisse ensuite reposer le tout. Après un temps plus ou moins long, les sphérules se trouvent,

pour la plupart, réunies en une seule masse. Quand la réunion est partiellement produite, c'est-à-dire quand le tout est réduit à un petit nombre de masses assez volumineuses, on peut activer l'opération : à cet effet, on introduit le bout d'un fil de fer dans l'une de ces masses, et l'adhérence qu'elle contracte avec le métal permet de la conduire aisément contre une autre, si elle n'y était déjà ; mais cela ne suffit pas pour que les deux se confondent ; elles demeurent séparées par une mince pellicule de liquide alcoolique, qui semble opposer une certaine résistance[1], et qu'on perce avec le fil de fer ; on arrive bientôt ainsi à n'avoir plus qu'une masse unique, abstraction faite de très-petites sphérules disséminées dans le liquide ambiant.

Si alors la masse unique occupe le fond du flacon, on en opère de nouveau la subdivision par des retournements ; si elle occupe le haut du liquide, on ajoute un peu d'alcool, puis on retourne de même plusieurs fois le flacon, mais avec grande précaution, afin de ne pas diviser la masse ou de ne la séparer qu'en un très-petit nombre de parties, et l'on s'arrange de manière qu'elle finisse encore par descendre lentement au fond, après quoi on la subdivise, comme précédemment, en petites sphérules qu'on laisse de nouveau se réunir ; enfin on ajuste les densités de façon que la masse ne manifeste plus de tendance prononcée à monter ou à descendre.

Il peut se faire, par suite d'un défaut d'homogénéité de l'huile, qu'après une subdivision, une partie des sphérules se rassemblent au fond et une autre partie dans le haut du liquide ; quand cela a lieu, et que chacun des deux

(1) Boyle avait déjà observé ce phénomène en effectuant les expériences dont il a été question dans la note du § 3.

groupes de sphérules s'est converti en une masse, on conduit la plus petite vers l'autre à l'aide du fil de fer, et on les oblige à n'en plus former qu'une.

Dans les opérations d'ajustement, quand la proportion d'alcool est trop forte, il ne faut pas ajouter de l'eau pure au mélange, car celui-ci ayant dissous de l'huile, l'eau précipiterait cette dernière, et le liquide deviendrait laiteux; on évite cet inconvénient en employant, au lieu d'eau pure, un mélange d'alcool et d'eau à 16° Beaumé. Disons ici que, lorsqu'on est très-près de l'équilibre des densités, les quantités d'alcool ou de liquide à 16° ajoutées doivent être extrêmement petites.

Quand, après ces opérations, l'huile se trouve, en presque totalité, constituer une masse unique sans tendance appréciable à monter ou à descendre, on la soutire au moyen d'un siphon amorcé par un tube latéral, et on la reçoit dans un autre flacon.

Comme on doit se procurer de la sorte une quantité de mélange alcoolique inerte plus que suffisante pour remplir le vase à parois planes, et une quantité d'huile également inerte supérieure à celle qu'on juge nécessaire pour les expériences, il faut effectuer la préparation ci-dessus dans plusieurs grands flacons à la fois. Lorsqu'elle est terminée, on fait passer toutes les masses d'huile dans un même flacon que leur ensemble doit remplir presque entièrement et qu'on bouche ensuite avec soin, sans quoi l'huile perdrait graduellement l'alcool qu'elle a absorbé. Elle se montre d'abord parsemée de sphérules de mélange alcoolique; mais ces sphérules cèdent peu à peu à l'huile une portion de leur alcool, et, prenant conséquemment un excès de densité, finissent par se rassembler au fond du flacon en une ou plusieurs masses qu'on enlève avec une pipette. Enfin il arrive parfois que l'huile ainsi pré-

parée a perdu de sa limpidité ; quand cette circonstance se présente, on ne s'en inquiète pas, elle ne nuit point aux expériences.

Quant au mélange alcoolique resté dans les grands flacons, il se trouve, de son côté, parsemé d'une multitude de très-petites sphérules d'huile ; mais on l'en débarrasse par une filtration, en maintenant les entonnoirs couverts pour éviter l'évaporation de l'alcool.

§ 7. La seconde cause perturbatrice réside dans les variations de la température, et l'on aurait peine à se figurer combien nos masses d'huile immergées y sont sensibles : par exemple, une grosse sphère d'huile étant bien en équilibre dans le liquide ambiant, si l'on transporte le vase dans une chambre quelque peu plus chaude ou plus froide que celle où il se trouvait d'abord, la sphère ne tarde pas, dans le premier cas, à descendre, et, dans le second, à monter ; il suffit même d'appliquer les mains à l'extérieur du vase pour la voir, après quelques instants, commencer à descendre. On comprend, d'après cela, que lorsqu'on veut réaliser les figures d'équilibre, il faut opérer dans un lieu dont la température demeure sensiblement constante pendant la durée des expériences.

Cette condition est impossible à remplir quand il s'agit d'une leçon publique : si l'on a réglé les densités avant l'arrivée des auditeurs, la présence de ceux-ci élève nécessairement la température, et l'équilibre s'altère. Nous indiquerons cependant, plus loin, un moyen de parer à cet inconvénient.

§ 8. Maintenant que nous possédons de l'huile et du mélange alcoolique préparés, et que nous connaissons l'influence des variations de la température, nous pouvons aborder les expériences.

Mais auparavant, je crois nécessaire d'insister sur un point; je suis, depuis un grand nombre d'années, affligé d'une cécité complète; le lecteur pourrait donc concevoir quelques doutes sur l'entière exactitude des faits que j'expose, et je dois le rassurer à cet égard. Toutes les expériences de ce premier chapitre, ainsi qu'une partie de celles du reste de l'ouvrage, ont été effectuées par moi-même, alors que je jouissais encore de la plénitude de ma vue; les autres ont toujours été faites, sauf des exceptions très-rares, en ma présence, sous ma direction, avec toutes les précautions que j'ai pu imaginer pour éviter des erreurs, et par des personnes habituées à l'observation. Ces personnes, dont il me suffira de citer ici les noms pour dissiper toute incertitude, sont : M. Duprez professeur de physique à l'Athénée et à l'École industrielle de Gand, M. Donny professeur de chimie, M. Lamarle professeur de construction, et M. Van der Mensbrugghe chargé du cours de physique mathématique, à l'Université de la même ville; enfin mon fils Félix, bien connu comme naturaliste expérimentateur.

§ 9. Passons enfin à la description des expériences. Soit d'abord simplement à réaliser une grosse sphère librement suspendue dans le mélange alcoolique. On commence, pour une raison que l'on connaîtra bientôt, par couvrir d'un carré d'étoffe de coton le fond du vase à parois planes, puis on verse dans ce vase, par l'ouverture du couvercle, le mélange alcoolique jusqu'à une hauteur convenable, et on l'y agite avec une spatule de verre pour en assurer l'homogénéité. L'huile qu'on doit introduire pouvant aussi ne pas être homogène, on la mêle également à l'aide d'une baguette de verre, en ayant soin de placer un tampon d'ouate dans le goulot

du flacon, afin que l'huile ne perde pas sensiblement d'alcool. On pose alors dans le goulot du couvercle du vase un petit entonnoir dont le col pénètre de quelques centimètres dans le liquide alcoolique, et l'on y verse l'huile, après avoir pris la précaution d'entourer d'une étoffe épaisse le flacon qui la contient, pour que la chaleur de la main ne puisse en modifier la densité.

Comme, à moins d'un hasard particulier, la température à laquelle on opère n'est pas identiquement la même que lors de la préparation des liquides, l'huile versée par l'entonnoir monte à la surface du liquide ambiant, ou bien descend au fond du vase. Dans le premier cas, on s'arrête après en avoir introduit une masse de peu de volume, on enlève l'entonnoir, et l'on absorbe, au moyen d'une petite seringue en verre à long bec, la masse flottante; on ajoute ensuite un peu d'alcool pur, dont on effectue soigneusement le mélange, et l'on répète, si cela est nécessaire, les mêmes opérations, jusqu'à ce que l'huile versée dans l'entonnoir descende avec lenteur, et aille se poser sur l'étoffe de coton. Je n'ai pas besoin d'avertir que si l'on avait ajouté trop d'alcool, on recourrait au mélange à 16°. Enfin on continue à verser de l'huile, pour donner à la masse le volume désiré.

Disons ici que le morceau d'étoffe est indispensable dans toutes les expériences : imprégné de liquide alcoolique il ne se laisse pas mouiller par l'huile, tandis que, sans sa présence, quand la masse descend, elle peut contracter de l'adhérence avec le fond du vase, s'y étaler, et rendre ainsi impossibles les opérations ultérieures.

Il peut se faire que l'huile, au lieu de s'accumuler

sur l'étoffe en une seule grosse masse, se trouve subdivisée en plusieurs masses séparées ; on réunit alors celles-ci à l'aide du fil de fer (§ 6), puis on ajuste les densités. Dans cette dernière opération, pour mêler intimement au reste du liquide ambiant les petites quantités ajoutées d'alcool pur ou d'alcool à 16°, on n'introduit pas la spatule par l'ouverture du couvercle ; il est plus commode de laisser cette ouverture fermée et de faire glisser la plaque de manière à découvrir une petite portion du haut du vase, par laquelle on fait passer la spatule ; on agite doucement et assez longtemps celle-ci dans le liquide, en prenant de grandes précautions pour que la masse d'huile ne se divise pas et pour qu'elle n'aille pas adhérer à l'une des parois latérales du vase.

Quand l'équilibre est définitivement établi, on a ainsi le curieux spectacle d'une grosse masse liquide parfaitement sphérique, et immobile au sein du liquide environnant.

§ 10. Si l'on veut montrer le résultat à un auditoire (§ 7), on termine les manipulations d'une manière un peu différente : au lieu de rendre les deux densités égales, on établit à dessein une certaine hétérogénéité dans le liquide alcoolique ; on fait d'abord en sorte que ce liquide contienne un petit excès d'alcool, puis on y verse lentement une quantité convenable de mélange à 16°. Celui-ci, en vertu de son excès de densité, descend au fond du vase, où il s'étend en couche horizontale. Alors on introduit l'huile, qui, à cause du petit excès d'alcool que renferme le mélange supérieur, descend à travers ce dernier, et vient, soit en une seule masse, soit en plusieurs masses partielles, se poser sur la couche plus dense du mélange inférieur. Cela étant, on réunit,

s'il y a lieu, les masses isolées en une seule; puis on agite le liquide avec précaution de manière à mêler imparfaitement la couche du fond avec les couches plus élevées, mais sans diviser la masse d'huile, et on laisse ensuite reposer le système. On voit qu'il doit résulter de là, dans le liquide alcoolique, un état de densité croissante à partir des couches supérieures moins denses que l'huile, jusqu'aux couches inférieures plus denses que cette même huile, et que, par conséquent, la masse d'huile devra se tenir en équilibre stable selon la verticale, dans une certaine couche dont la densité moyenne est égale à la sienne (1).

Alors, si la température vient à s'élever ou à s'abaisser un peu, la sphère d'huile descendra ou montera d'une certaine quantité; mais, si le liquide ambiant est suffisamment hétérogène, elle rencontrera bientôt une couche ayant en moyenne la même densité qu'elle, et s'y arrêtera.

A la vérité, dans ces conditions, la masse ne peut plus constituer rigoureusement une sphère; elle doit être aplatie d'une petite quantité dans le sens vertical; mais, à moins que l'hétérogénéité du liquide ambiant ne soit trop forte, cet aplatissement est insensible à l'œil, et la masse paraît sphérique.

§ 11. J'ai décrit minutieusement les précautions à prendre pour assurer le succès de l'expérience actuelle; elles sont les mêmes à l'égard de toutes les autres expériences qui se font par le procédé de l'immersion, et elles sont indispensables. On en acquiert bientôt l'habitude,

(1) Les différentes couches liquides ainsi superposées tendent, il est vrai, à se mêler d'elles-mêmes; mais comme elles sont placées dans l'ordre de leurs densités, ce mélange spontané ne s'effectue qu'avec une extrême lenteur, et il faut un grand nombre de jours pour que le liquide devienne homogène. Il ne résulte donc de là aucun inconvénient pour les expériences.

et alors tout devient très-facile; mais si on les néglige, on n'obtient que des résultats fort imparfaits.

Signalons encore une circonstance qui pourrait embarrasser : dans le cours des expériences, il arrive assez souvent, soit par un abaissement de la température, soit parce qu'on a introduit une trop grande quantité de mélange à 16°, que la masse employée s'élève jusqu'à la surface du liquide ambiant et s'y aplatit plus ou moins, mais en laissant au-dessus d'elle une mince pellicule de ce liquide, pellicule qui semble résistante, comme entre deux masses juxtaposées (§ 6); alors, après quelque temps, la masse se fait jour et présente une portion de surface plane au niveau de celle du liquide environnant; et, ce qu'il y a de singulier, c'est qu'elle a, pour ainsi dire, contracté une adhérence avec cette dernière surface. Pour l'en détacher complétement, le seul moyen est de verser avec précaution un peu d'alcool pur, lequel s'étend sur l'ensemble des deux surfaces, et détruit ainsi l'adhérence en question; on mêle ensuite cet alcool pur avec le mélange alcoolique sous-jacent.

Il est inutile d'ajouter qu'après chaque série d'expériences, on soutire, comme nous l'avons dit (ibid.), la masse d'huile à l'aide d'un siphon, et que, si le mélange alcoolique est parsemé de petites sphérules d'huile, on le filtre en maintenant l'entonnoir couvert.

§ 12. Avant d'aller plus loin, insistons sur une remarque. L'attraction en jeu dans mes expériences est l'attraction moléculaire, laquelle, on le sait, ne s'exerce d'une manière sensible que jusqu'à une distance excessivement petite, et les forces qui déterminent les figures de nos masses d'huile immergées n'émanent que d'une couche superficielle dont la minceur est extrême. Au contraire, dans une grosse masse céleste supposée fluide,

l'action de la couche superficielle est insensible, et l'attraction efficace est l'attraction universelle, en vertu de laquelle toutes les parties de la masse agissent les unes sur les autres quelles que soient leurs distances mutuelles. Ces deux espèces d'attraction doivent donc produire des résultats différents ; si toutes les deux donnent la sphère, c'est à cause de la symétrie parfaite de cette figure, symétrie qui en ferait une forme d'équilibre sous toutes les lois d'attraction imaginables ; mais, à part ce cas spécial, on se tromperait étrangement si l'on voulait tirer de mes expériences quelque induction à l'égard de faits astronomiques.

§ 13. Appliquons actuellement notre procédé à de nouvelles expériences : il va nous permettre, en premier lieu, de vérifier les principes les plus importants de la théorie de l'action capillaire.

Commençons par celui que nous avons rappelé ci-dessus, et suivant lequel les actions capillaires émanent toutes d'une couche superficielle d'épaisseur excessivement minime.

Concevons un système solide quelconque plongé dans l'intérieur de notre sphère d'huile, et donnons à cette sphère un volume tel qu'elle puisse envelopper complétement le système solide sans que celui-ci en atteigne la surface en aucun point. Alors, si le principe en question est vrai, la présence du système solide n'aura aucune influence sur la figure d'équilibre, puisque, dans ces circonstances, la couche superficielle, d'où émanent les actions figuratrices, demeure entièrement libre ; tandis que si ces actions émanaient de tous les points de la masse, une modification non symétrique apportée aux parties intérieures de celle-ci en amènerait nécessairement une dans la forme extérieure.

C'est ce qui est confirmé par l'expérience : la condition d'un système solide complétement enveloppé par la masse d'huile serait assez difficile à réaliser; mais on peut en approcher de très-près en introduisant dans la sphère liquide une plaque en fer de forme arbitraire suspendue par un fil de fer très-fin qui la traverse ainsi que la masse d'huile; tant qu'aucun point du bord de cette plaque n'atteint la surface de la masse liquide, celle-ci conserve sa forme sphérique. Dans la rigueur mathématique, la sphéricité doit être, comme nous le verrons plus loin, quelque peu altérée par le fil métallique qui perce la surface en deux points; mais, par suite de la finesse de ce fil, l'altération est tout à fait inappréciable.

Voici un autre fait d'une nature analogue. Dans le cours des expériences, il arrive parfois que des portions du liquide alcoolique se trouvent emprisonnées dans l'intérieur de la masse d'huile, et y forment autant de sphères isolées. Or ces sphères peuvent être placées d'une manière quelconque dans l'intérieur de la masse, sans qu'il en résulte la moindre modification dans la figure extérieure de celle-ci.

Faisons encore pénétrer dans la masse liquide un système solide quelconque ; mais donnons maintenant à la masse un volume trop petit pour qu'elle puisse constituer une sphère qui enveloppe complétement ce système. Alors ce dernier atteindra nécessairement la couche superficielle, et, si le principe est vrai, la figure de la masse liquide devra se modifier, ou, en d'autres termes, ne pourra plus demeurer sphérique. C'est ce qui a lieu en effet, comme on devait s'y attendre : la masse liquide s'étend sur les portions du système solide qui font saillie en dehors de sa surface; elle finit

par occuper soit la totalité de ces portions, soit seulement une partie de leur étendue, selon la forme et les dimensions du système solide, et prend ainsi une autre figure d'équilibre. Nous en verrons des exemples plus loin.

Au lieu de faire pénétrer le système solide dans l'intérieur de la masse liquide, mettons-le simplement en contact avec la surface extérieure de celle-ci. Alors une action s'établissant sur un point de la couche superficielle, l'équilibre devra être rompu et la figure de la masse liquide devra encore se modifier. C'est ce qui arrive : la masse s'étend sur la surface qui lui est offerte, et prend par conséquent une figure nouvelle. On pourrait croire que ce cas rentre dans l'un de ceux dont nous venons de parler ; car il semble que la masse liquide, en s'étendant sur le système solide pour atteindre la nouvelle figure d'équilibre, doit finir par occuper ou envelopper ce système de la même manière que si l'on avait primitivement fait pénétrer celui-ci dans son intérieur. Il y a effectivement des circonstances dans lesquelles les choses doivent se passer ainsi ; mais les expériences que nous allons rapporter font voir qu'il y a d'autres circonstances pour lesquelles le résultat est tout différent.

§ 14. Prenons pour système solide une plaque circulaire mince en fer[1] portée par un fil de même métal fixé normalement à son centre (*fig*. 1). Le bout libre de ce fil est taillé en vis, de manière à pouvoir s'engager et être serré dans l'écrou de la tige cylindrique (§ 4) ; quand le couvercle du vase est en place, le petit système solide se trouve ainsi immergé dans le liquide alcoolique.

Fig. 1.

(1) Le diamètre de celle dont je me suis servi était de 4 centimètres. Je mentionne ce diamètre pour fixer les idées; dans nos expériences, les dimensions des systèmes solides sont tout à fait arbitraires, et n'ont d'autres limites que celles qui sont imposées par la grandeur du vase.

Avertissons ici le lecteur, pour éviter des redites, 1° que tous ceux de nos systèmes solides qui doivent être suspendus dans le liquide alcoolique, s'attachent de la même façon; 2° qu'ils sont tous en fer, pour la raison énoncée dans la note du § 4; 3° qu'avant d'introduire dans le vase l'un quelconque de ces systèmes solides, il faut le mouiller entièrement d'huile, et pour cela il ne suffirait pas de le tremper simplement dans ce liquide, il faut l'en frotter légèrement avec le doigt.

Maintenant, une sphère d'huile étant préalablement réalisée dans le mélange alcoolique, faisons naître l'adhérence entre sa partie supérieure et la face inférieure de notre plaque solide (1). Aussitôt le contact bien établi, l'huile s'étend rapidement sur la surface qui lui est offerte; mais, ce qui est remarquable, quoique l'on ait pris la précaution de frotter d'huile tout le système, c'est-à-dire les deux faces de la plaque ainsi que son bord, l'huile s'arrête nettement à ce bord sans passer de l'autre côté de la plaque, et présente ainsi une interruption brusque dans la courbure de sa surface.

Dans le cas dont il s'agit, la nouvelle figure que prend la masse est une portion de sphère. Cette portion sera d'autant plus grande relativement à la sphère complète,

(1) Pour que cette opération puisse s'effectuer avec facilité, il faut d'abord que la sphère d'huile se tienne, dans le liquide ambiant, au-dessous de l'ouverture du couvercle; alors, la plaque étant introduite dans le vase, on n'a plus qu'à l'abaisser à l'aide de la tige qui traverse le bouchon, pour l'amener vers la masse. Si cette dernière n'occupait pas la position dont il s'agit, on l'y conduirait préalablement en la poussant au moyen d'une baguette de verre.

Nous devons faire remarquer que le contact réel entre la plaque et la sphère d'huile ne s'établit pas ordinairement tout de suite : il y a une certaine résistance à vaincre, analogue à celle dont il a été question dans les §§ 6 et 11; mais, pour la surmonter, il suffit de pousser un peu la sphère liquide avec la plaque; la pression légère qui en résulte détermine bientôt la rupture de l'obstacle et la production de l'adhérence.

que le volume de la masse d'huile est plus considérable; mais toujours la courbure s'arrêtera nettement au contour de la plaque (voyez la *fig.* 2, qui représente la coupe

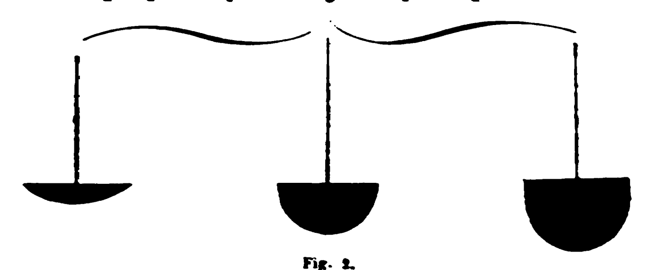


Fig. 2.

du système solide et de la masse adhérente, pour trois volumes différents de celle-ci).

Quant à la cause de cette singulière discontinuité, on la comprend sans peine : la plaque atteignant par son contour la couche superficielle, il est naturel qu'il se manifeste le long de ce contour quelque chose de particulier, et que la continuité dans la forme cesse là où s'exerce sans transition, sur la couche superficielle, une action attractive étrangère.

§ 15. Servons-nous encore de la plaque ci-dessus; mais au lieu de présenter l'une de ses faces à l'extérieur de la sphère d'huile, faisons maintenant pénétrer la plaque par son bord dans l'intérieur de cette sphère (1). Alors le liquide s'étendra nécessairement sur les deux faces du solide, et si le diamètre de la sphère primitive

(1) Voici comment s'exécute cette manœuvre. On soutient à quelque distance au-dessus du goulot du couvercle le bouchon qui porte le système de la plaque, de manière, cependant, que celle-ci plonge à une profondeur suffisante dans le mélange alcoolique. On a ainsi la liberté de faire faire à la plaque des mouvements assez étendus, et on l'amène vers la masse liquide. Cette dernière doit, pour cela, occuper préalablement une position convenable. Une fois la masse liquide entamée, on tient la plaque en repos jusqu'à ce que l'action soit terminée, après quoi l'on pose avec précaution le bouchon dans le goulot.

était moindre que celui de la plaque, on verra l'huile former, sur les deux faces dont il s'agit, deux segments sphériques dont les courbures s'arrêteront encore nettement au contour de la plaque. Ces deux segments peuvent être égaux ou inégaux, selon qu'on aura introduit le bord de la plaque dans la sphère liquide de manière que le plan de cette plaque passe, ou non, par le centre de la sphère. Le segment supérieur sera légèrement déformé par l'action du fil de suspension ; mais cet effet serait insensible si la plaque était soutenue par un fil très-fin. La *fig.* 3 représente le résultat de l'expérience avec deux segments inégaux.

Fig. 3.

La discontinuité dans les courbures est un fait très-général, que nous verrons se reproduire fréquemment dans le cours de nos expériences ; il nous conduira plus loin à des conséquences d'un grand intérêt.

§ 16. Ici se place une remarque importante. Quand une figure liquide s'arrête ainsi à un contour solide, on doit la considérer comme une portion d'une figure d'équilibre plus étendue, qu'on peut poursuivre par la pensée au-delà du contour solide. En effet, l'attraction moléculaire exercée par ce contour ne s'étendant que jusqu'à une distance excessivement petite, tout le reste de la couche superficielle de la masse liquide produit librement ses pressions, et se façonne conséquemment de manière à satisfaire à la formule [2] du § 1 ; or la loi géométrique à laquelle sa forme est soumise ne peut cesser brusquement au contour en question. C'est ainsi que, dans les expériences des deux paragraphes précédents, les figures qui s'appuient soit sur la face inférieure seulement, soit sur les deux faces de la plaque, sont des segments de sphère, à part toujours la petite déformation

que le fil solide fait subir au segment supérieur. Nous verrons bientôt qu'à l'aide de systèmes solides convenables, on réalise des figures d'équilibre partielles très variées.

§ 17. Voici encore un fait qui montre d'une manière assez curieuse que la couche superficielle seule est le siége des actions figuratrices. Si on laisse séjourner pendant deux ou trois jours, une masse d'huile fraîche dans le liquide alcoolique en rétablissant de temps à autre l'égalité des densités (§ 5), puis qu'on soutire la majeure partie de la masse au moyen d'un siphon, on voit, quand cette masse est suffisamment réduite, sa surface former des plis; et si alors on enlève le siphon, la masse restante, qui demeure suspendue dans le liquide ambiant, ne prend plus la figure sphérique; elle conserve un aspect irrégulier, et paraît indifférente à toutes les formes. C'est que, par suite de l'action dissolvante inégale qu'exerce le mélange alcoolique sur les éléments de l'huile (ibid.), les principes solides deviennent prédominants à la surface de celle-ci, et, se condensant au fur et à mesure de l'exhaustion de la masse, finissent par constituer une sorte de pellicule. Ainsi quand la couche superficielle perd une partie de sa liquidité, la masse perd en même temps sa tendance à prendre une figure d'équilibre déterminée.

§ 18. Vérifions maintenant un second principe, celui des pressions exercées par la couche superficielle sur la masse.

Le système solide que nous allons employer, est une plaque circulaire percée (*fig.* 4). Elle est placée verticalement, et attachée par un point de sa circonférence au fil de fer qui la supporte. Donnons à la sphère d'huile un diamètre moindre que celui de la plaque, et faisons pénétrer celle-ci par son bord dans la

Fig. 4.

masse, suivant une direction qui ne passe point par le centre de la sphère. L'huile formera d'abord, comme dans l'expérience du paragraphe 15, deux segments sphériques inégaux; mais les choses ne persisteront point dans cet état: on verra le segment le plus convexe diminuer graduellement de volume, et par conséquent de courbure, tandis que l'autre augmentera, jusqu'à ce qu'ils soient devenus parfaitement égaux entre eux. Une partie de l'huile passe donc par l'ouverture de la plaque pour se porter de l'un des segments liquides vers l'autre, jusqu'à ce que l'égalité ci-dessus soit atteinte.

Or, remarquons-le, une fois l'huile étendue sur les deux faces de la plaque, de manière que la couche superficielle s'appuie sur tout le contour de celle-ci, l'action du système solide est complétée, et les mouvements qui surviennent ensuite dans la masse liquide pour atteindre la forme d'équilibre, ne peuvent plus dès lors être dus qu'à une action émanant de la partie libre de la couche superficielle. C'est donc cette dernière qui chasse le liquide à travers l'ouverture de la plaque du segment le plus courbe vers l'autre, d'où l'on peut conclure que le liquide est soumis à une pression tout au moins de la part de la couche superficielle du segment le plus courbe. Mais il est aisé de voir que la couche superficielle de l'autre segment exerce aussi une pression, qui, seulement, est moindre que la précédente; en effet, si au segment le plus courbe on venait à substituer un segment qui fût, au contraire, moins courbe que l'autre, l'huile serait alors chassée en sens opposé. Il suit de tout cela que la couche superficielle totale de la masse exerce une pression sur le liquide qu'elle renferme, et que l'intensité de cette pression dépend des courbures de la surface libre. En outre, puisque le liquide marche du

segment le plus courbe à celui qui l'est moins, on voit que, pour une surface convexe de courbure sphérique, la pression est d'autant plus forte que la courbure est plus prononcée, ou que le rayon de la sphère à laquelle appartient la surface est plus petit.

Cette influence de la courbure était, aussi bien que l'existence même des pressions, indiquée par la théorie : quand il s'agit d'une surface de courbure sphérique convexe, la formule [1] du § 1, qui représente la pression exercée par la couche superficielle en un point quelconque de celle-ci, devient $P + \frac{A}{R}$, puisque, dans ce cas, R' est égal à R ; et comme, pour un même liquide, P et A sont constants, on voit que la pression dont il s'agit est d'autant plus énergique que le rayon R est plus petit, ou, en d'autres termes, que la surface est plus courbe.

Ainsi notre expérience confirme pleinement la théorie, non seulement quant à l'existence des pressions capillaires, mais encore quant à leur dépendance d'avec les courbures.

La relation entre la formule ci-dessus et notre expérience suggère une remarque : le terme P, qui désigne la pression correspondante à une surface plane, est le même pour nos deux segments liquides ; or, les pressions se transmettant dans toute la masse, il en résulte que la portion P de la pression due à la couche superficielle de l'un des segments se trouve neutralisée par la même portion P émanée de l'autre segment ; par conséquent, les pressions réellement en jeu dans le phénomène que nous venons de décrire, sont simplement exprimées, pour chaque segment, par le terme $\frac{A}{R}$, c'est-à-dire par celui qui dépend de la courbure.

§ 19. Le principe vérifié dans les §§ 13 à 17 conduit à modifier l'expérience précédente de manière à obtenir un résultat important. L'équilibre une fois produit, ce n'est plus que par son bord extérieur que la plaque percée agit sur la couche superficielle de chacun des deux segments sphériques ; tout le reste de cette plaque est donc alors sans influence sur la figure totale. Or il suit de là que celle-ci serait encore la même si l'on rendait l'ouverture plus grande ; seulement, plus le diamètre de cette dernière sera considérable, moins il faudra de temps pour que l'égalité entre les deux courbures soit établie. Enfin, l'on doit pouvoir, sans changer la figure d'équilibre, agrandir l'ouverture jusque près du bord de la plaque, ou, en d'autres termes, réduire le système solide à un simple anneau de fil de fer mince.

C'est ce que l'expérience confirme ; mais, pour la mettre à exécution, l'on ne pourrait pas se borner, comme précédemment, à faire pénétrer le système solide dans une sphère d'huile d'un diamètre moindre que celui de ce même système, et à laisser ensuite agir les forces moléculaires ; car le fil métallique, à cause de son peu d'épaisseur, n'obligerait pas le liquide à s'étendre de manière à adhérer à la totalité de l'anneau. La masse demeurerait alors traversée par une partie de celui-ci, et sa forme sphérique ne serait pas sensiblement altérée si le fil métallique est mince : pour obtenir la figure cherchée, on commence par donner à la sphère d'huile un diamètre un peu supérieur à celui de l'anneau métallique ; puis on introduit ce dernier dans la masse de manière qu'il soit complétement enveloppé ; enfin, à l'aide de la petite seringue en verre (§ 9), on enlève graduellement du liquide à la

masse[1]. Alors celle-ci diminuant de volume, sa surface s'appuie bientôt sur tout le contour de l'anneau, et, le volume continuant à diminuer, la forme lenticulaire se manifeste. On peut ensuite, par de nouvelles soustractions de liquide, réduire les courbures des deux surfaces au degré que l'on juge convenable. On obtient de cette manière une belle lentille bi-convexe, entièrement liquide à l'exception de sa circonférence. De plus, en vertu de l'excès considérable de l'indice de réfraction de l'huile d'olive sur celui du mélange alcoolique, la lentille dont il s'agit possède toutes les propriétés des lentilles de convergence : par exemple, elle grossit les objets que l'on regarde au travers, et l'on peut faire varier ce grossissement à volonté, en enlevant ou en ajoutant du liquide à la masse.

Notre figure liquide réalise donc ce qu'on ne pourrait obtenir avec les lentilles de verre, c'est-à-dire qu'elle constitue une lentille à courbure et à grossissement variables.

Celle que j'ai formée avait un diamètre de sept centimètres, et l'épaisseur du fil métallique était d'environ un demi-millimètre. On pourrait employer avec le même succès un fil bien plus mince ; mais alors l'appareil deviendrait incommode par sa trop grande facilité à se déformer.

En agissant avec précaution, on peut diminuer les courbures de la lentille jusqu'à les rendre presque nulles : j'ai pu réduire, par exemple, la lentille que j'ai formée et dont le diamètre était, comme je l'ai dit, de sept centimètres, à n'avoir plus que deux ou trois millimètres d'épaisseur.

(1) On introduit le bec de l'instrument par l'ouverture qu'on a ménagée au haut du vase en faisant glisser (§ 9) la plaque couvercle.

§ 20. Nous venons de montrer l'accord de l'expérience avec la théorie dans le cas des surfaces convexes de courbure sphérique ; nous allons voir que l'accord subsiste de même dans le cas des surfaces planes et des surfaces concaves de courbure sphérique.



Fig. 5.

Servons-nous d'un système solide formé d'une large bande de fer courbée circulairement de manière à constituer un cylindre creux, et attachée au fil de fer de suspension par un point de sa surface extérieure (*fig.* 5). Pour ne pas amener dans l'expérience la production de phénomènes accessoires, nous supposerons que la largeur de la bande métallique est inférieure au diamètre du cylindre formé par cette même bande, ou qu'elle lui est tout au plus égale. Faisons adhérer la masse d'huile avec la surface intérieure de ce système, et supposons que le liquide soit en quantité assez considérable pour qu'il fasse alors saillie au dehors du cylindre. Dans ce cas, la masse présentera, de chaque côté, une surface convexe de courbure sphérique, et les courbures de ces deux surfaces seront égales. Cette forme de l'ensemble est une conséquence de ce que nous avons vu précédemment, et nous ne devons pas nous y arrêter ; mais elle va nous servir comme point de départ, pour arriver aux autres figures dont nous avons besoin.

Appliquons le bec de la seringue à l'une des surfaces convexes ci-dessus, et enlevons graduellement du liquide. Les deux surfaces diminueront alors en même temps de courbure, et, en opérant avec ménagement, nous arriverons ainsi à les rendre parfaitement planes ; or nous savons (§ 2) qu'une surface plane satisfait aussi à la condition de l'équilibre.

Appliquons ensuite le bec de l'instrument à l'une de ces surfaces planes, et enlevons encore une petite quantité de liquide. Alors les deux surfaces se creuseront simultanément, et constitueront deux surfaces concaves de courbure sphérique, dont les bords s'appuient sur ceux de la bande métallique, et dont les courbures sont les mêmes. Enfin, par de nouvelles extractions de liquide, les courbures des deux surfaces deviendront de plus en plus fortes, en demeurant toujours égales entre elles.

Cette expérience conduit évidemment aux conséquences suivantes : puisque la surface plane laissée libre s'enfonce spontanément dès que celle à laquelle on applique l'instrument devient concave, il faut en conclure que la couche superficielle appartenant à la première exerçait une pression, qui se trouvait contre-balancée par une force égale émanée de la couche superficielle plane opposée, mais qui cesse de l'être et qui chasse le liquide, dès que cette couche opposée commence à se creuser. De plus, puisqu'une nouvelle extraction de liquide détermine une nouvelle rupture d'équilibre, de manière que la surface concave opposée à celle sur laquelle on agit directement manifeste un nouvel enfoncement spontané lorsque l'autre surface augmente de courbure, il en résulte que la couche superficielle concave appartenant à la première exerçait encore une pression, qui, d'abord, était neutralisée par une pression égale provenant de l'autre couche concave, mais qui devient prépondérante et chasse de nouveau le liquide, lorsque cette autre couche augmente de courbure.

L'expérience rend donc visible : 1° qu'une surface plane détermine une pression sur le liquide ; 2° qu'une surface concave de courbure sphérique détermine aussi

une pression ; 3° que cette dernière est inférieure à celle qui correspond à une surface plane ; 4° qu'elle est d'autant moindre que la concavité est plus prononcée, ou que le rayon de la sphère à laquelle appartient la surface est plus petit.

Or tous ces résultats étaient encore annoncés par la formule [1] : puisqu'il s'agit toujours de surfaces de courbure sphérique, on a, comme précédemment, $R' = R$; en outre, les surfaces considérées étant concaves, le rayon R est négatif (§ 1) ; la formule devient conséquemment $P - \frac{A}{R}$. Mais on sait, d'après la théorie de Laplace, que le terme P est toujours très-grand relativement au suivant ; la pression totale exprimée par cette formule est donc nécessairement positive, et moindre que P ; de plus, on le voit, elle est d'autant plus faible que le rayon R est plus petit, ou, en d'autres termes, que la surface est plus concave ; elle se réduit d'ailleurs à P quand le rayon R est infini, c'est-à-dire quand la surface est plane.

Dans l'application de cette même formule à l'expérience, on peut, de même que dans le cas du § 18, remarquer que la portion P des pressions se trouve neutralisée, et ne regarder ainsi comme force agissante à chacune des deux surfaces que celle qui est représentée par le terme $-\frac{A}{R}$; or ce terme étant négatif, la force dont il s'agit est une succion, et celle-ci est d'autant plus énergique que la courbure est plus forte.

§ 21. La figure que nous venons d'obtenir, constitue une lentille bi-concave à courbures égales, et elle jouit de toutes les propriétés des lentilles de divergence, c'est-à-dire qu'elle rapetisse les objets que l'on regarde

au travers, etc. En outre, comme on peut augmenter ou diminuer la courbure des deux surfaces par degrés aussi petits qu'on le veut, il en résulte que l'on a ainsi une lentille de divergence à courbure et à effets variables.

Après avoir formé une lentille liquide de convergence et une lentille liquide de divergence, il m'a paru curieux de combiner ces deux espèces de lentilles, afin d'en former une lunette liquide. Pour cela, j'ai d'abord substitué à l'anneau de fil de fer du paragraphe 19, une plaque circulaire de même diamètre percée d'une grande ouverture (*fig.* 6); cette plaque étant coupée au tour, j'étais certain de l'avoir parfaitement circulaire, tandis qu'il serait bien difficile de remplir la même condition avec un simple fil de fer courbé. En second lieu, j'ai pris, pour la partie solide de la lentille bi-concave, une bande d'environ 2 centimètres de largeur et courbée suivant un cylindre de 3 1/2 centimètres de diamètre. Ces deux systèmes ont été assemblés comme le représente la *fig.* 7, de manière que tout l'appareil étant suspendu verticalement dans le mélange alcoolique par le fil de fer *a*, et les deux lentilles liquides étant formées, leurs deux centres fussent à la même hauteur, et distants l'un de l'autre de 10 centimètres. Dans cette disposition, on ne peut pas ajuster la lunette en modifiant la distance entre l'objectif et l'oculaire; mais on parvient au même but en faisant varier les courbures de ces deux lentilles. A l'aide de quelques tâtonnements, je suis aisément parvenu à obte-

Fig. 6.

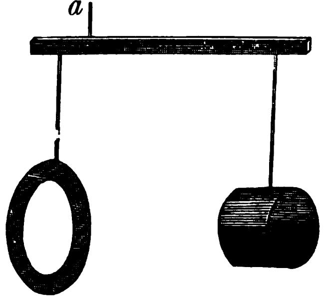


Fig. 7.

nir ainsi une excellente lunette de Galilée, grossissant environ deux fois les objets éloignés, comme les lorgnettes de spectacle ordinaires, et donnant des images parfaitement nettes et extrêmement peu irisées. La *fig.* 8, qui représente une coupe du système, montre l'ensemble des deux lentilles. On comprend que la lentille concave doit être très-rapprochée de la face du vase par laquelle on regarde ; c'est pourquoi le fil de fer *a* est plus éloigné de cette lentille que de l'autre.

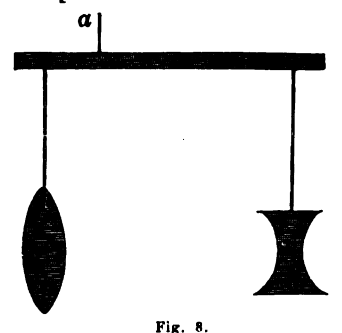


Fig. 8.

§ 22. Voici enfin une vérification d'un genre tout différent, relative à un autre point encore. Ainsi qu'on le sait, l'ascension des liquides pesants dans les tubes dont ils peuvent mouiller les parois ne prend quelque développement que lorsque ces tubes ont de très-petits diamètres intérieurs, d'où est venue la dénomination de phénomènes capillaires, et la pesanteur établit toujours une limite à la hauteur de la colonne soulevée. Mais si l'on neutralise l'action de la pesanteur, ces restrictions doivent disparaître, et le liquide doit pouvoir monter indéfiniment dans un tube d'un diamètre quelconque.

Il m'a paru curieux d'essayer cette application de mon procédé. On conçoit d'abord qu'il faut maintenir l'orifice supérieur du tube au-dessous de la surface du liquide alcoolique qui remplit le vase, afin que, tout se passant au sein de ce liquide, la pesanteur ne puisse exercer aucune influence sur le phénomène.

Avec cette condition, l'expérience paraît très-simple; il semble qu'il suffit de procéder de la manière suivante: 1° former, dans le liquide alcoolique, une sphère d'huile

d'un volume convenable, les deux liquides ayant la même densité; 2° amener cette sphère près du fond du vase; 3° prendre un tube de verre d'un diamètre quelconque, mais d'une longueur telle qu'en supposant son extrémité inférieure en contact avec le haut de la masse d'huile, son extrémité supérieure n'atteigne pas la surface du liquide alcoolique; 4° mouiller parfaitement d'huile l'intérieur de ce tube; 5° enfin introduire ce même tube verticalement dans le vase, l'y enfoncer jusqu'à ce qu'il touche la masse d'huile, et le maintenir, par quelque moyen, immobile dans cette position.

§ 23. C'est bien à peu près ainsi, en effet, que l'expérience doit se faire; mais il est nécessaire d'employer certaines précautions accessoires qui facilitent les opérations, et sans lesquelles on obtiendrait rarement un résultat complet.

En premier lieu, vu la nature des phénomènes que l'on veut observer, on comprend qu'il est avantageux de remplacer le vase à parois planes qui nous a servi jusqu'ici, par un appareil ayant moins de largeur et plus de hauteur; celui dont j'ai fait usage est une grande éprouvette en verre, large de 10 centimètres et haute de 55.

En second lieu, une égalité parfaite entre les densités de l'huile et du liquide ambiant est assez longue à obtenir; il est plus commode de faire en sorte que l'huile ait un très-petit excès de densité par suite duquel elle descende d'elle-même très-lentement au fond du vase, où l'on aura placé préalablement un morceau d'étoffe de coton (§ 9); si l'excès de densité est extrêmement faible, il aura peu d'influence en présence de l'action des forces moléculaires.

En troisième lieu, pour que le tube une fois introduit dans l'appareil s'y soutînt dans la position convenable,

j'ai employé le moyen simple que voici : près de l'extrémité supérieure du tube, on a enroulé un fil de cuivre, en le tordant ensuite avec une pince pour le serrer, mais de manière qu'il restât deux bouts libres d'une longueur suffisante ; on a relevé obliquement ces deux bouts libres, et l'on en a replié les extrémités en forme de crochets; ceux-ci étant posés sur le bord supérieur du vase cylindrique, servent ainsi à suspendre le tube dans l'intérieur de ce vase. En outre, pour empêcher que le tube n'éprouvât des balancements incommodes, on a attaché, vers son milieu, et par le même moyen, un second fil de cuivre dont les bouts n'étaient point repliés en crochets et faisaient ressort contre la paroi intérieure du vase[1]; de cette façon, le tube se maintient immobile dans l'axe du système. Ajoutons que la longueur des fils de cuivre à crochets doit être telle que lorsque le tube est placé, son orifice inférieur atteigne le haut de la sphère d'huile qui repose sur le fond du vase.

En quatrième lieu, il faut faire garnir l'extrémité inférieure du tube d'un collet en fer, muni lui-même, à son contour inférieur, d'un rebord mince d'environ 3 millimètres de largeur. Cette addition a pour objet de s'opposer à ce que la masse d'huile s'élève plus ou moins, et d'une manière irrégulière, sur la surface extérieure du tube ; ici, comme dans l'expérience du § 14, le petit rebord arrête toute ascension extérieure de l'huile, et oblige la masse à prendre sous le tube une position parfaitement symétrique.

En cinquième lieu, pour pouvoir apprécier la vitesse du

(1) Il est nécessaire d'employer ici du fil de cuivre, et non du fil de fer : car ce dernier pourrait rayer le vase à l'intérieur, et l'on sait qu'il suffit souvent d'une raie imperceptible formée sur la paroi interne d'un vase de verre, pour occasionner la rupture de celui-ci.

mouvement de la colonne liquide ascendante et les variations de cette vitesse, on marque, avec de l'encre, sur le tube, des traits perpendiculaires à sa longueur et également espacés, de décimètre en décimètre, par exemple, à partir de l'orifice inférieur ; ces traits sont tracés tout autour du verre, afin de rendre l'observation plus facile.

En sixième lieu, si, avant de plonger dans le vase le tube muni de tous les accessoires ci-dessus, on se borne à en mouiller d'huile la surface intérieure, on voit bientôt se manifester un phénomène qui m'a longtemps embarrassé : la couche d'huile se retire irrégulièrement pour s'accumuler en certains endroits et faire place, en d'autres, au liquide alcoolique, de sorte que la continuité de la couche huileuse est détruite. C'est en vain que l'on prend tous les soins possibles pour huiler parfaitement le tube à l'intérieur; on peut même y faire préalablement bouillir de l'huile, l'effet ci-dessus ne s'en produit pas moins. Après plusieurs essais infructueux pour parer à cet inconvénient, j'ai imaginé le procédé suivant, qui donne une réussite complète. On ferme avec un bouchon de liége une des extrémités du tube, et l'on remplit celui-ci de saindoux fondu et très-chaud, qu'on y laisse séjourner pendant quelques minutes ; on vide ensuite le tube, on le débouche, et, le suspendant verticalement, on le laisse égoutter, jusqu'à ce que la couche légère de saindoux qui y demeure adhérente soit entièrement refroidie ; on a soin de le retourner de temps à autre, afin de rendre plus uniforme l'épaisseur de la couche graisseuse. Le tube étant ainsi préparé, on le bouche de nouveau, on le remplit d'huile, on le vide immédiatement, on le débouche et on le plonge aussitôt dans le vase; la couche d'huile retenue alors par son adhérence avec le saindoux ne se divise plus.

§ 24. Lorsque les choses sont organisées de la sorte, l'expérience a un plein succès : dès que l'adhérence est établie entre la sphère d'huile et le rebord qui garnit l'orifice du tube, on voit l'huile s'élever graduellement dans l'intérieur de ce dernier jusqu'à en atteindre l'extrémité supérieure, bien que ce même tube ait un grand diamètre, et qu'on lui ait donné toute la longueur que permet la disposition de l'appareil. Pendant son ascension, la colonne d'huile se montre terminée par une surface hémi-sphérique concave. Son mouvement est un mouvement retardé ; nous en connaîtrons bientôt la raison.

Dans l'une de mes expériences, le tube avait 14 millimètres de diamètre intérieur, et 42 centimètres de longueur; le diamètre de la sphère d'huile était d'environ 7 centimètres, et cette masse possédait un si petit excès de densité, qu'elle avait employé plus d'un quart d'heure à descendre jusqu'au fond du vase.

Voici, dans ces conditions, les temps employés par le sommet de la colonne liquide à parcourir les décimètres successifs de la longueur du tube :

1er décimètre.	1′ 47″
2me —	3′ 37″
3me —	6′ 37″
4me —	9′ 0″

On voit que ces temps vont en croissant, et qu'ainsi, comme je l'ai dit plus haut, le mouvement est retardé.

§ 25. Cherchons à nous rendre raison de cette particularité, et, pour cela, examinons quelles sont les actions mises en jeu dans le mouvement ascensionnel du liquide.

Pendant l'accomplissement du phénomène, le tube est occupé par l'ensemble de deux colonnes, l'une inférieure formée d'huile et qui va en augmentant de longueur, l'autre supérieure formée de liquide alcoolique et qui va,

au contraire, en diminuant; mais les densités des deux liquides étant à fort peu près égales, on peut regarder la somme des masses de ces deux colonnes, ou la masse totale à mouvoir dans l'intérieur du tube, comme ne variant pas sensiblement. D'un autre côté, la force qui produit l'ascension de l'huile, est une force continue, et, de plus, croissante. En effet, elle résulte de la différence des pressions respectivement exercées par la surface convexe de la masse attachée à l'orifice inférieur du tube et par la surface concave qui constitue le sommet de la colonne; or cette dernière surface conserve la même courbure, et détermine, par conséquent, la même pression, pendant toute la durée du phénomène, tandis que la première, par la diminution graduelle de la masse qu'elle enveloppe, prend une courbure de plus en plus forte, et détermine ainsi une pression de plus en plus intense.

Maintenant la force dont il s'agit s'exerçant sur une masse invariable, tend nécessairement à produire un mouvement accéléré; mais il y a dans le système une résistance qui croît avec la hauteur de la colonne d'huile, et qui, par suite, tend au contraire à rendre le mouvement retardé. Cette résistance naît du frottement de la double colonne qui occupe le tube contre la couche d'huile adhérente à la paroi intérieure de celui-ci; le frottement de la partie huileuse de la colonne totale est évidemment beaucoup plus fort que celui de la partie alcoolique, et comme la résistance due au premier croît avec la longueur de la colonne d'huile, on comprend que la résistance totale qui provient des deux frottements va aussi en croissant. Le mouvement tend donc, d'une part, à être accéléré, et, de l'autre, à être retardé, et l'on admettra sans peine que la seconde influence peut l'emporter sur la première.

A la rigueur, dans l'appréciation de la force qui produit le mouvement ascensionnel, il faudrait considérer, outre l'action moléculaire de l'huile sur elle-même, celle du liquide alcoolique sur lui-même, et enfin l'action mutuelle des deux liquides. Mais il ne s'agit ici que de l'effet des courbures; or, aux surfaces de séparation des deux liquides, les courbures ont des sens opposés, suivant qu'on les regarde comme appartenant à l'un ou à l'autre de ces liquides, d'où il résulte que les actions qui en proviennent sont de même sens : par exemple, à la masse adhérente sous le tube, la surface de l'huile étant convexe, de sorte que son rayon de courbure est positif, l'action due à la courbure est dirigée à l'intérieur de l'huile (§ 1), et la surface du liquide alcoolique étant concave, ce qui rend son rayon négatif, l'action que détermine la courbure est dirigée à l'extérieur du liquide en question et, par suite, encore à l'intérieur de l'huile. Il est clair, de plus, que ces deux actions qui s'ajoutent sont, en chaque point, dans le même rapport; il suffit donc, pour la simplicité des raisonnements, d'en considérer une seule, et l'on peut prendre à volonté celle de l'huile sur elle-même ou celle du liquide alcoolique sur lui-même. Quant à l'action mutuelle des deux liquides, elle ne fait que diminuer, dans un rapport évidemment constant aussi, la somme des deux précédentes, et par conséquent on peut la négliger.

§ 26. Comme on l'a vu plus haut, dans l'expérience telle que je l'ai décrite, il y a une cause qui empêche d'apercevoir l'effet simple des forces capillaires, effet qui devrait donner lieu à un mouvement accéléré de la colonne. Mais on peut atténuer l'influence de cette cause perturbatrice ; il suffit pour cela d'exécuter l'expérience dans des conditions inverses des précédentes, c'est-à-dire

en remplissant le vase d'huile et en substituant à la sphère d'huile une sphère de liquide alcoolique. En effet, il faudra alors que la paroi intérieure du tube soit mouillée d'une couche de ce dernier liquide, et les deux parties de la colonne ascendante frottant contre cette couche, on évitera ainsi le frottement si résistant de l'huile contre elle-même. Dans cette disposition de l'expérience, les frottements exercés par les deux parties de la colonne étant, pour la partie inférieure celui du liquide alcoolique contre lui-même, et, pour la partie supérieure, celui de l'huile contre ce même liquide, la différence entre ces deux frottements, quel qu'en soit le sens, sera nécessairement beaucoup moindre que dans le cas précédent; d'où il suit que la résistance totale approchera beaucoup plus d'être indépendante de la hauteur de la partie inférieure de la colonne; on peut donc s'attendre à obtenir, dans ce cas, un mouvement accéléré.

§ 27. Essayons de soumettre ces conclusions à l'épreuve de l'expérience. Mais remarquons auparavant que le changement dans les conditions du phénomène en nécessite aussi dans les opérations préalables. Et d'abord pour que la sphère alcoolique, après être lentement descendue dans l'huile ambiante, ne puisse contracter d'adhérence avec le fond du vase, on dépose d'avance sur ce fond un disque de fer que l'on a soigneusement frotté d'huile.

En second lieu, la paroi intérieure du tube doit évidemment être mouillée d'une couche de liquide alcoolique; mais, si l'on n'emploie un moyen particulier, cette couche se divise, comme se divise la couche d'huile dans l'expérience précédente quand on n'a pas recours à l'enduit de saindoux. Le moyen que je vais indiquer a une efficacité complète : après avoir bouché le tube à l'une de ses extrémités, on le remplit d'une solution assez épaisse

de gomme arabique, puis on le vide, on le débouche, et on le laisse égoutter, en le retournant plusieurs fois pour que la couche gommeuse prenne une épaisseur égale partout, jusqu'à ce que cette couche soit parfaitement sèche(1); alors après l'avoir bouché de nouveau, on le remplit de liquide alcoolique que l'on en fait écouler immédiatement, on le débouche et on le plonge à l'instant dans l'huile du vase.

Enfin il faut encore empêcher la masse alcoolique de s'élever en partie sur la surface extérieure du tube, et, pour cela, il suffit qne l'extrémité inférieure de celui-ci soit garnie, comme dans l'expérience précédente, d'un collet en fer; seulement ce collet doit être sans rebord, et il faut éviter soigneusement que de petites portions de la solution gommeuse ci-dessus ne s'attachent à sa surface; il est bon, en outre, de le frotter d'huile, ce que l'on fera quand on aura terminé l'opération de la couche gommeuse.

Il est inutile d'ajouter que le tube doit être muni des fils de cuivre destinés à en assurer la position et des traits à l'encre qui servent à observer la marche du sommet de la colonne.

§ 28. Lorsque toutes ces dispositions sont prises, que le tube est en place et atteint par son extrémité inférieure la sphère alcoolique, le liquide qui forme celle-ci commence aussitôt à s'élever dans le tube, et son mouvement est en effet accéléré. Voici les résultats obtenus avec un tube de 15 millimètres de diamètre intérieur et de 42 centimètres de longueur, la sphère alcoolique ayant

(1) J'ai rencontré certains tubes qui n'exigeaient pas cette préparation, et qu'il suffisait de mouiller directement à l'intérieur avec le liquide alcoolique, après les avoir parfaitement nettoyés. Il sera, du reste, toujours plus sûr de faire usage de l'enduit gommeux.

à peu près le même diamètre que la sphère d'huile de l'expérience précédente et ne possédant également qu'un très-petit excès de densité ; le tube était partagé en demi-décimètres.

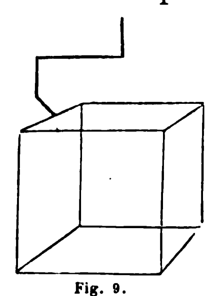
1er	demi-décimètre	54″
2me	—	48″
3me	—	46″
4me	—	43″
5me	—	42″
6me	—	41″
7me	—	39″
8me	—	37″

Il y a un grand nombre d'années que j'ai effectué ces expériences d'ascension capillaire ; or j'ai gardé le vague souvenir d'un fait dont je n'ai point pris note alors : je crois avoir essayé aussi avec un tube de longueur analogue, mais dont le diamètre intérieur n'était que de 5mm environ, et avoir constaté que le liquide n'y montait pas, ou s'arrêtait bientôt. La lenteur du mouvement ascensionnel, dans les expériences précédentes, montre que les forces qui produisent ce mouvement sont faibles, et, dans un tube étroit, les résistances deviennent sans doute suffisantes pour empêcher leur action. Si donc ma mémoire ne me trompe pas, il faut, pour réussir, employer des tubes larges, comme ceux dont j'ai parlé.

§ 29. Revenons aux figures d'équilibre. Dans l'expérience du paragraphe 20, nous avons obtenu une figure qui présentait des surfaces planes. Celles-ci étaient au nombre de deux, parallèles entre elles, et limitées par des périphéries circulaires ; mais il est évident que ces conditions ne sont pas nécessaires pour que des surfaces planes puissent appartenir à une masse liquide en équilibre. On comprend que les formes des contours solides doivent être indifférentes, pourvu qu'elles constituent des figures planes. On comprend, en outre, que le nombre

et les directions relatives des surfaces planes peuvent être quelconques, puisque de telles circonstances n'influent en rien sur les pressions qui correspondent à ces surfaces, pressions qui demeureront toujours égales entre elles. Enfin l'expérience du § 19 nous a montré qu'il suffit d'un simple fil métallique pour établir la discontinuité entre les deux portions de surface qui s'appuient sur lui. Nous pourrons donc réaliser le passage brusque entre une surface plane et une autre au moyen d'un fil de fer représentant l'arête de l'angle d'intersection de ces deux surfaces.

Tout cela nous conduit à cette curieuse conséquence, que l'on doit pouvoir former des polyèdres entièrement liquides à l'exception de leurs seules arêtes. Or, c'est ce que l'expérience vérifie pleinement : si l'on prend pour système solide une charpente en fil de fer représentant l'ensemble des arêtes d'un polyèdre quelconque, et que l'on fasse adhérer à cette charpente une masse d'huile d'un volume convenable, on obtient, en effet, d'une manière parfaite, le polyèdre dont il s'agit, et l'on a ainsi le curieux spectacle de parallélipipèdes, de prismes, etc., formés d'huile, et qui n'ont de solide que leurs arêtes seules. La *fig.* 9 représente la charpente du cube avec son fil de suspension, lequel doit naturellement être plus gros que ceux qui constituent les arêtes. Quant aux dimensions, je dirai que les arêtes de ma charpente cubique avaient 7 centimètres de longueur; ici, du reste, comme toujours, les dimensions sont tout à fait arbitraires.


Fig. 9.

§ 30. Pour réaliser l'un de ces polyèdres liquides, on donne d'abord à la masse d'huile un volume assez grand

pour qu'elle puisse envelopper la charpente, et l'on y fait pénétrer cette dernière ; s'il le faut, on pousse la masse dans un sens ou dans un autre avec une spatule de verre préalablement bien nettoyée. Cela fait, on enlève de l'huile au moyen de la petite seringue, et l'on voit bientôt la surface de la masse s'appuyer à la fois sur toutes les arêtes solides ; toutes les faces de la figure sont alors convexes. En continuant l'action de la seringue, on voit cette convexité diminuer partout en même temps, et, en opérant par degrés convenables, on arrive à rendre toutes les faces exactement planes [1].

Je dois insister à cet égard sur l'ajustement exact des densités : la plus légère différence entre elles suffit pour altérer les surfaces d'une manière sensible. En outre, afin d'atteindre une régularité parfaite, il est souvent utile, non seulement dans le cas actuel, mais, en général, dans celui de toute figure un peu volumineuse, d'employer une précaution dont je n'ai pas encore parlé. Il peut arriver, par suite des petites actions dissolvantes résultant des additions d'alcool pur ou de mélange à 16° toujours nécessaires au commencement d'une série d'expériences pour l'ajustement des densités, que l'huile qui constitue la masse perde de son homogénéité ; alors les portions plus chargées d'alcool et conséquemment moins denses, gagnent le haut de la figure et tendent à monter, tandis que les portions plus denses gagnent le bas et tendent à descendre. Dans ce cas, avec la charpente cubique, par exemple, les faces latérales de la

(1) Pour avoir à enlever moins d'huile et abréger ainsi les opérations, on peut encore s'y prendre comme suit : on ne donne à la masse d'huile qu'un volume un peu supérieur à celui du polyèdre qu'elle doit former, puis on l'amène dans la charpente, et, à l'aide d'une spatule de fer qu'on y fait pénétrer, on l'oblige sans peine à s'attacher successivement à toute la longueur des arêtes solides ; enfin on épuise l'excès d'huile.

figure pourraient se montrer sensiblement planes, et les faces supérieure et inférieure être encore légèrement convexes.

Pour parer à cet inconvénient, on introduit dans la masse une spatule de fer qu'on y promène dans tous les sens pendant longtemps et avec ménagement, de manière à ne pas déformer la charpente par des chocs ; l'opération doit s'effectuer avant qu'on ait enlevé tout l'excès d'huile. Quand on retire la spatule, elle entraîne avec elle une petite quantité d'huile qu'elle abandonne en sortant du mélange alcoolique, et qu'on absorbe ensuite avec la seringue. Disons encore que la manœuvre de la spatule détermine parfois l'introduction de bulles alcooliques dans l'intérieur de la masse d'huile ; on les aspire aussi avec la seringue.

Enfin, quand l'expérience doit se faire devant un auditoire nombreux, on établit une petite hétérogénéité dans le mélange alcoolique (§ 10), et, si la température s'élève ou s'abaisse, il suffit de faire descendre ou monter d'une certaine quantité le polièdre liquide en enfonçant ou retirant la tige cylindrique ; on amène ainsi ce polièdre dans une couche dont la densité moyenne est égale à celle de l'huile.

§ 31. Présentons une dernière remarque : les polièdres qu'on veut réaliser doivent ne pas avoir d'angles dièdres rentrants ; l'arête solide d'un angle de cette espèce ne peut rendre indépendantes les deux surfaces qui y aboutissent, car, à moins que le fil solide ne soit très-gros ou l'angle très-obtus, ces deux surfaces communiqueraient l'une avec l'autre, et dès lors, sur toute la ligne suivant laquelle elles se joindraient, la courbure, dans le sens transversal, serait extrêmement forte, ce qui déterminerait une succion énergique. Il est aisé

de voir, en effet, que, dans la petite portion de surface qui raccorderait les deux faces planes, les courbures principales seraient, d'une part, la courbure nulle suivant la longueur du fil, et, d'autre part, la forte courbure transversale en question; la première aurait conséquemment un rayon infini, et la seconde, à cause de sa forme concave, un rayon négatif; le terme dépendant des courbures dans la formule [1] du § 1 se réduirait donc à $-\frac{A}{2R}$, c'est-à-dire représenterait (§ 20) une succion, comme je l'ai dit, et, par suite de la petitesse de R, cette succion serait très-forte; le liquide alors franchirait l'arête, et s'accumulerait en plus ou moins grande quantité dans l'angle rentrant.

Aussi est-ce ce dernier résultat que montre l'expérience : quand on essaie de réaliser un semblable polyèdre, on rend aisément planes toutes les faces sauf les deux qui devraient former l'angle rentrant, et celui-ci demeure partiellement rempli par de l'huile qui y présente une surface courbe unique. Cette surface, qui doit déterminer la même pression que les faces planes, est nécessairement à courbure moyenne nulle, et, par conséquent, en chacun de ses points, les deux courbures principales sont égales, mais l'une convexe et l'autre concave (§ 2).

§ 32. De même qu'avec nos lentilles d'huile nous avons réalisé l'effet d'une lunette de Galilée, de même un prisme triangulaire d'huile peut être employé à produire le phénomène de la dispersion : l'on obtient ainsi un beau spectre solaire à l'aide d'un prisme à faces liquides. Seulement, comme l'effet n'est dû qu'à l'excès de l'action réfringente de l'huile sur celle du liquide alcoolique, il faut, pour avoir un spectre bien étalé,

que l'angle réfringent du prisme soit obtus : un angle de 110° donne un très-bon résultat. En outre, il faut évidemment que les faces du prisme soient parfaitement planes, ce qui exige une charpente travaillée avec soin.

Pour terminer ce qui concerne les polyèdres liquides, disons que M. Mach, dans une conférence dont il sera question au § 210bis, avance qu'on peut réaliser de semblables polyèdres dans l'air, pourvu qu'on leur donne des dimensions minimes : d'après lui, si l'on construit, par exemple, en fil métallique très-fin, une charpente cubique d'environ 1 1/2 lignes (3mm) de côté, qu'on la plonge dans l'eau, qu'on l'en retire, et qu'avec un morceau de papier à filtre on enlève l'excès de liquide, on obtient un petit cube d'eau.

CHAPITRE II.

Considérations relatives aux figures d'équilibre en général. Figures d'équilibre de révolution : sphère, plan, cylindre, onduloïde, caténoïde, nodoïde ; étude expérimentale à l'aide du premier procédé ; résultats des géomètres.

§ 33. Avant de nous occuper d'une manière spéciale des figures d'équilibre autres que la sphère et le plan et de leur réalisation par notre premier procédé, généralisons une remarque dont nous avons déjà fait, dans le chapitre précédent, quelques applications partielles. Pour plus de clarté, reprenons l'expression (§ 1) de la pression, rapportée à l'unité de surface, qu'exerce un élément de la couche superficielle, savoir :

$$P + \frac{A}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Si, au point considéré, les courbures principales

$\frac{1}{R}$ et $\frac{1}{R'}$ sont l'une et l'autre convexes, et, par suite, positives, ou bien si elles sont de sens contraires, mais que la convexe l'emporte sur la concave, le second terme de la formule ci-dessus est positif, et conséquemment la pression totale, au point dont il s'agit, est supérieure à P, c'est-à-dire à celle d'une surface plane. La figure d'équilibre est alors à courbure moyenne finie et positive.

Si les courbures principales sont toutes deux concaves et ainsi négatives, ou si, l'une étant concave et l'autre convexe, la première est en excès, le second terme de la formule est négatif, et, par conséquent, la pression totale au point considéré est inférieure à celle d'une surface plane. Dans ce cas, la figure d'équilibre est à courbure moyenne finie et négative. En outre, puisque la pression P se trouve toujours neutralisée d'elle-même, ainsi que je l'ai fait observer (§§ 18 et 20), on peut regarder l'action de la couche superficielle comme constituant une succion.

Enfin si les deux courbures principales sont égales et de sens opposés, ce qui annule le terme en question, la pression se réduit à P, ou à celle d'une surface plane; c'est le cas des surfaces à courbure moyenne nulle.

Il est inutile d'ajouter que si l'une des courbures principales est nulle, le signe du terme est déterminé, ainsi que le sens de l'action, par le signe de l'autre courbure principale.

§ 34. Tout cela étant compris, nous pouvons poursuivre. A en juger uniquement par l'expérience, la sphère est la seule figure d'équilibre possible à l'état complet, avec une masse finie de liquide; en effet, une masse d'huile entièrement libre dans le liquide alcoolique se façonne invariablement en sphère, et si on la

déforme par un moyen quelconque et qu'on l'abandonne ensuite à elle-même, elle reprend toujours la figure sphérique. Cela revient à dire que la sphère est la seule surface à courbure moyenne constante qui soit fermée, et qu'ainsi toutes les autres ont des dimensions infinies dans certains sens. Cependant cette déduction, bien qu'extrêmement probable, n'est pas tout à fait concluante : une surface fermée différente de la sphère et à courbure moyenne constante pourrait exister, sans que la figure qu'elle représente fût réalisable par l'expérience; si, par exemple, cette figure, dans son entier, était à l'état d'équilibre instable, genre d'équilibre dont nous constaterons de nombreux cas, il est clair que notre masse d'huile ne la prendrait jamais.

Les géomètres n'ont pu, que je sache, résoudre complétement la question; seulement, en premier lieu, il est aisé de faire voir que s'il y a une surface fermée, autre que la sphère, à courbure moyenne constante, elle ne doit pas être cherchée parmi les surfaces à courbure moyenne nulle. En effet, une figure fermée est nécessairement telle qu'on peut concevoir un plan qui lui soit entièrement extérieur et ne fasse que la toucher en un point; or il est visible qu'en ce point toutes les courbures sont de même sens; la figure supposée ne saurait donc satisfaire à la condition qu'en chacun de ses points les deux courbures principales soient de sens contraires. Il suit de là qu'au moins les surfaces à courbure moyenne nulle sont toutes indéfiniment étendues, ce dont le plan nous a déjà offert un exemple.

En second lieu, M. Jellett a démontré (1) que, de toutes les surfaces fermées telles qu'une droite issue

(1) *Sur la surface dont la courbure moyenne est constante* (Journ. de M. Liouville, t. XVIII, p. 163, année 1853).

d'un point de l'espace qu'elles emprisonnent ne les perce qu'en un point unique, la sphère est la seule dont la courbure moyenne soit constante.

Enfin, parmi les surfaces complétement déterminées dont j'ai parlé au § 2, six, y compris la sphère, sont à courbure moyenne finie, et les cinq différentes de la sphère sont indéfiniment prolongées.

§ 35. Considérons actuellement l'une quelconque des figures d'équilibre à dimensions infinies dans certains sens. Nous ne pourrons la réaliser dans sa totalité; mais imaginons cette réalisation effectuée, et engageons, par la pensée, dans la figure indéfinie, un système solide qui en limite complétement une portion. Si les contours de ce système solide sont exactement à la surface de la masse, il est évident que la figure ne sera pas modifiée, car les contours solides n'exerçant leur attraction que jusqu'à une distance excessivement minime, tout le reste de la surface liquide se trouvera dans les mêmes conditions qu'auparavant. Conséquemment si le système solide se compose de deux plaques minces comprenant entre elles la portion de figure dont il s'agit, nous pourrons concevoir supprimées les deux parties qui s'étendent indéfiniment au-delà ; la portion interceptée, portion qui seule sera conservée, n'aura subi aucune altération, et sa surface s'arrêtera nettement, comme dans l'expérience du § 14, aux contours des deux plaques. Rien ne nous empêche donc de réaliser effectivement cette portion isolée, ce qui nous conduit à la conclusion générale, qu'à l'aide de systèmes solides appropriés, nous pouvons réaliser par portions toutes les figures d'équilibre.

Et ici, remarquons-le, l'expérience va plus loin que la théorie ; en effet, à cause des difficultés de calcul, il

n'y a, nous l'avons dit, qu'un petit nombre de surfaces à courbure moyenne constante parfaitement connues; or, en variant les formes des systèmes solides, on peut obtenir autant de figures d'équilibre partielles qu'on le veut ; elles sont là sous nos yeux, et nous pouvons les observer à loisir ; seulement, comme, en général, nous n'en avons pas les équations en coordonnées finies, nous ignorons ce qu'elles deviennent au-delà des limites des systèmes solides.

Mais une question se présente : supposons l'une de ces figures partielles réalisée dans mon appareil ; on est en droit de se demander si le mélange alcoolique dans lequel elle est immergée n'en modifie pas la forme. Or, à la surface de séparation des deux liquides, le mélange alcoolique offre, en creux, la même figure que l'huile offre en relief ; si donc la figure de la masse d'huile ne satisfaisait pas à la formule [2] du § 1, la figure en creux du mélange alcoolique n'y satisferait pas davantage (§ 2), et conséquemment l'équilibre ne pourrait exister ; ainsi, pour qu'il existe, la condition exprimée par la formule doit nécessairement être remplie à l'égard de la figure d'huile, auquel cas elle l'est de même à l'égard de celle du mélange alcoolique.

Disons enfin que, pour la réalisation de la plupart des figures d'équilibre partielles, les systèmes solides peuvent être formés de simples fils de fer ; c'est ce que l'on comprendra bientôt.

§ 36. Commençons par les figures d'équilibre de révolution, parmi lesquelles nous connaissons déjà la sphère et le plan. La discussion, au point de vue purement mathématique, des surfaces de révolution à courbure moyenne constante est à-peu-près complète ; nous exposerons plus loin les résultats qu'elle a donnés ;

mais, quant à présent, proposons-nous d'arriver sans calcul aux formes générales de ces surfaces, à toutes leurs modifications et à tous leurs détails, en nous appuyant sur l'expérience et en nous aidant du simple raisonnement appliqué à la formule $\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=C$. Dans cette recherche, l'expérience et la théorie marcheront toujours côte à côte, et la première nous fournira ainsi un grand nombre de vérifications de la seconde.

Il est bien connu des géomètres que l'un des rayons de courbure principaux en un point quelconque d'une surface de révolution est le rayon de courbure de la ligne méridienne, et que l'autre est la portion de la normale à cette ligne comprise entre le point considéré et l'axe de révolution, ou, comme on le dit plus simplement, la normale en ce point. D'après cela, pour éviter toute ambiguité, nous remplacerons, dans la formule ci-dessus, les lettres R et R′ par les lettres M et N, dont la première rappellera qu'elle désigne le rayon de courbure de la ligne méridienne, et dont la seconde rappellera de même qu'elle désigne la normale; ainsi, tant qu'il s'agira des figures de révolution, la formule de l'équilibre sera

$$\frac{1}{M}+\frac{1}{N}=C\ldots\ldots.. [4]$$

§ 37. Cette notation convenue, nous allons d'abord démontrer que, outre le plan, la sphère est la seule figure d'équilibre de révolution dont la ligne méridienne rencontre l'axe.

Concevons une figure d'équilibre de révolution autre que le plan et la sphère, et dont la ligne méridienne atteigne l'axe. Je dis, en premier lieu, que cette ligne ne peut aboutir à l'axe que normalement. En effet, si elle le coupait obliquement ou si elle lui était tangente, la nor-

male serait nulle au point d'intersection ou de contact, et la quantité $\frac{1}{M}+\frac{1}{N}$ deviendrait infinie en ce point (1),

(1) Il y a toutefois, à la rigueur, un cas auquel ce raisonnement semblerait n'être pas applicable. On peut concevoir une courbe telle, qu'au point où elle rencontre l'axe, le rayon de courbure soit nul, et qu'aux environs de ce point le rayon de courbure et la normale soient de signes contraires; alors la quantité $\frac{1}{M}+\frac{1}{N}$ constituerait une différence, dont les deux termes deviendraient à la fois infinis au point situé sur l'axe, et l'on ne voit pas, au premier abord, que cette différence ne puisse demeurer finie. Nous avons donc à démontrer que la chose est impossible.

Pour cela, mais uniquement dans ce cas, nous serons obligé de faire usage des expressions connues du rayon de courbure et de la normale en fonction des coefficients différentiels.

Si nous prenons l'axe de révolution pour axe des abscisses, nous aurons, comme on sait, p et q étant respectivement les coefficients différentiels du premier et du second ordre de y par rapport à x,

$$M=\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} \quad \text{[a]}$$

$$N=y(1+p^2)^{\frac{1}{2}}; \quad \text{[b]}$$

d'où nous déduirons, pour le rapport des deux termes du premier membre de l'équation de l'équilibre,

$$\frac{\frac{1}{N}}{\frac{1}{M}}=\frac{1+p^2}{qy} \quad \text{[c]}$$

Soit maintenant $y=f(x)$ l'équation de la ligne méridienne. Prenons pour origine des coordonnées le point où cette ligne rencontre l'axe, de manière que, pour $x=o$, on ait $y=o$; nous pourrons alors supposer la fonction $f(x)$ développée suivant une série de puissances ascendantes et positives de x; et si nous voulons que la courbe rencontre l'axe sous un angle autre qu'un angle droit, ce qui exige que, pour $x=o$, le premier coefficient différentiel soit fini ou nul, il faudra que l'exposant de x dans le premier terme de la série soit au moins l'unité. Remarquons ici que, n'ayant à considérer la courbe qu'au point où elle atteint l'axe et dans les points très-voisins, nous pouvons toujours supposer x extrêmement petit, en sorte que, relativement à cette portion de la courbe, notre série sera nécessairement convergente. Posons donc :

$$y=ax^m+bx^n+\ldots \quad \text{[d]}$$

tandis qu'elle aurait des valeurs finies dans les points voisins ; cette quantité ne serait donc pas constante dans tout le parcours de la courbe comme le veut l'équation de l'équilibre.

Imaginons maintenant que la figure liquide remplisse la condition que nous venons d'établir, et considérons, à partir de l'axe, un arc de la ligne méridienne. Puisque, par hypothèse, cette ligne n'est ni droite ni circulaire, la

équation dans laquelle les exposants $m, n, \ldots\ldots$ sont positifs et le plus petit m est au moins égal à l'unité. On aura conséquemment :

$$p = max^{m-1} + nbx^{n-1} + \ldots\ldots$$
$$q = m(m-1)ax^{m-2} + n(n-1)bx^{n-2} + \ldots\ldots$$

D'après cela, si l'on veut qu'au point situé sur l'axe le rayon de courbure soit nul, on voit, par la formule [a], qu'en ce même point, q doit être infini, et, en vertu de la seconde des expressions ci-dessus, cette condition sera satisfaite si le premier au moins des exposants $m, n, \ldots$ est plus petit que 2.

Portons actuellement dans la formule [c] ces mêmes expressions de p et de q et celle de y ; il viendra :

$$\frac{\frac{1}{N}}{\frac{1}{M}} = \frac{1 + \left(max^{m-1} + nbx^{n-1} + \ldots\right)^2}{\left(m(m-1)ax^{m-2} + n(n-1)bx^{n-2} + \cdots\right)\left(ax^m + bx^n + \cdots\right)},$$

et l'on voit aisément que, pour $x = o$, ce rapport devient infini. Remarquons, en passant, que ce résultat est indépendant de la condition $m < 2$, en sorte qu'il est vrai aussi bien pour un rayon de courbure fini ou infini au point situé sur l'axe, que pour un rayon de courbure nul ; ce qui devait être, d'ailleurs, d'après ce que nous avons vu plus haut. Maintenant si, en ce même point, le rayon de courbure est nul, les deux quantités $\frac{1}{N}$ et $\frac{1}{M}$ prennent, à la vérité, l'une et l'autre une valeur infinie ; mais puisque leur rapport devient en même temps infini, leur différence devient également infinie, ce qu'il fallait démontrer.

Remarquons enfin qu'une ligne dont le rayon de courbure serait nul au point situé sur l'axe, ne pourrait satisfaire à la formule de l'équilibre, quand même elle rencontrerait l'axe perpendiculairement ; en effet, il est aisé de voir qu'alors, dans le voisinage du point de rencontre, le rayon de courbure et la normale seraient de même sens, et qu'ainsi, au point dont il s'agit, la quantité $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$ serait la somme, et non la différence, de deux infinis.

courbure de l'arc variera d'un point à un autre; elle commencera conséquemment par aller soit en augmentant, soit en diminuant, et nous pourrons prendre l'arc assez petit pour que la courbure aille toujours en augmentant, ou toujours en diminuant, à partir du point situé sur l'axe jusqu'à l'autre extrémité. Supposons d'abord que la courbure aille en croissant, et soit *abd* (*fig.* 10) l'arc dont il s'agit. Au point *a* la normale est couchée sur l'axe, et, à mesure qu'on s'éloigne de ce point, elle fait avec l'axe un angle de plus en plus grand; mais nous limiterons la longueur de l'arc de manière que, de *a* en *d*, cet angle ne cesse point d'être aigu. Par les deux points *a* et *d* faisons passer un arc de cercle *acd* qui ait son centre sur l'axe, et qui, par conséquent, rencontre aussi ce dernier normalement.

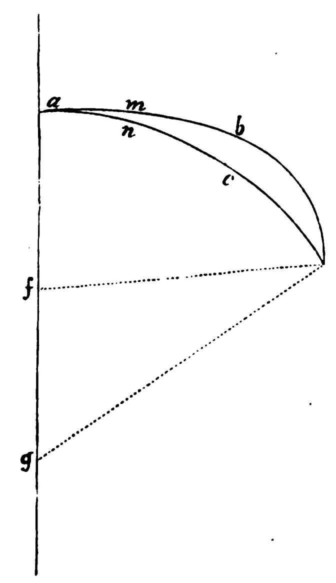


Fig. 10.

Puisque l'arc *abd*, dont la courbure va toujours en augmentant, part du point *a* suivant la même direction que l'arc de cercle, et, après s'être séparé de celui-ci, le rejoint en *d*, il est évident que sa courbure doit d'abord être inférieure à celle de ce second arc, et lui devenir ensuite supérieure, en sorte qu'au point *d* le rayon de courbure de l'arc *abd* est plus petit que le rayon de l'arc de cercle. Mais de la direction initiale commune des deux arcs, et de cette marche relative de la courbure de l'arc *abd*, il résulte nécessairement que ce dernier est, comme le montre la figure, extérieur à l'autre, et qu'au

point *d* il doit le couper, et non le toucher ; si donc on mène, en ce point *d*, la normale *df* à l'arc de courbe et le rayon *dg* de l'arc de cercle, la première sera moins oblique sur l'axe que le second, et conséquemment elle sera plus courte. Ainsi, au point *d*, les deux quantités M et N seront toutes deux moindres que le rayon de l'arc de cercle. Prenons actuellement, dans la partie de l'arc *abd* où la courbure est moindre que celle de l'arc de cercle, un point quelconque *m*, et prenons, sur le second de ces arcs, un point *n* tel que la portion *an* soit égale en longueur à la portion *am*. Dans ces conditions, le point *m* sera évidemment plus éloigné de l'axe que le point *n*, et, d'autre part, la normale en *m* sera plus oblique à l'axe que le rayon mené de *n*; par cette double raison, la normale dont il s'agit sera donc plus grande que le rayon de l'arc de cercle ; mais, par suite de l'infériorité de la courbure en *m*, le rayon de courbure en ce point sera aussi plus grand que le rayon de l'arc de cercle.

Il résulte de tout cela que les valeurs de M et de N correspondantes au point *m* sont l'une et l'autre supérieures à celles qui correspondent au point *d*; mais il est clair que M et N sont de même signe dans toute la longueur de l'arc *abd*, et qu'ainsi, au point *m* comme au point *d*, la quantité $\frac{1}{M}+\frac{1}{N}$ constitue une somme ; cette même quantité est donc plus petite en *m* qu'en *d*, et conséquemment l'équilibre de la figure liquide engendrée est impossible.

Si l'on suppose maintenant que la courbure de notre arc méridien aille toujours en diminuant, comme on le voit en *a' b' d'* (*fig.* 11), il est visible qu'alors cet arc sera intérieur à l'arc de cercle *a' c' d'* ayant sont

centre sur l'axe, que sa courbure commencera par être supérieure à celle de ce dernier, pour lui devenir ensuite inférieure, et qu'au point d' l'un des arcs viendra encore couper l'autre et non le toucher; d'où l'on conclura, par le mode de raisonnement employé dans le cas précédent, que la quantité $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$ est plus grande en un point voisin de a' qu'en d', en sorte que l'équilibre de la figure engendrée est également impossible.

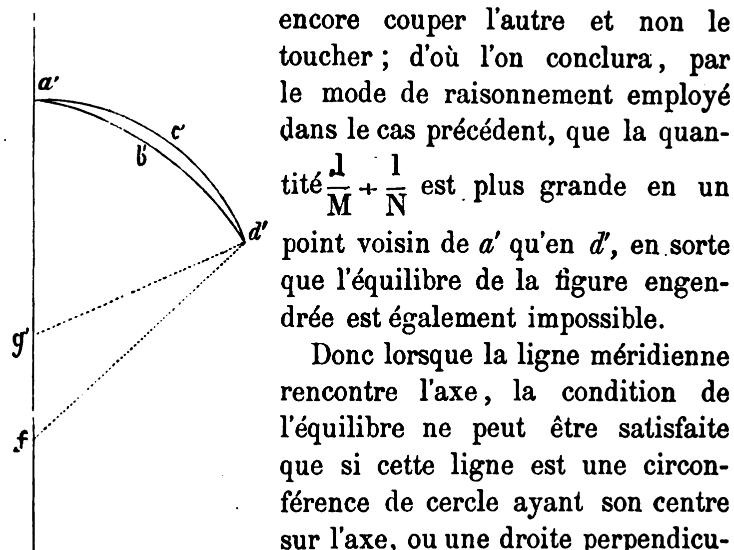


Fig. 11.

Donc lorsque la ligne méridienne rencontre l'axe, la condition de l'équilibre ne peut être satisfaite que si cette ligne est une circonférence de cercle ayant son centre sur l'axe, ou une droite perpendiculaire à celui-ci; donc enfin la figure engendrée est nécessairement une sphère ou un plan.

De là découle la vérité de ce que j'ai avancé en décrivant les expériences des §§ 14 à 20, savoir que les portions de surfaces qui s'appuient sur le contour de la plaque circulaire, de l'anneau ou du cylindre creux, sont des calottes sphériques. Pour qu'il pût en être autrement, il faudrait que la calotte courbe ne fût pas de révolution, ce dont l'œil s'apercevrait aisément.

§ 38. Les lignes méridiennes des autres figures d'équilibre de révolution ne pouvant avoir aucun point de commun avec l'axe, ces lignes devront ou s'étendre à l'infini, ou se fermer en dehors de l'axe. Les premières engendreront des figures qui s'étendent elles-mêmes à l'infini. Les secondes donneraient des figures annu-

laires ; nous saurons plus loin si l'existence de semblables figures est possible.

Pour simplifier la recherche des lignes dont il s'agit, nous allons démontrer qu'elles ne contiennent aucun point de rebroussement. Supposons l'existence d'un point de cette nature ; nous avons à considérer trois cas : 1° celui où la tangente au point de rebroussement, tangente qui y est commune aux deux branches de la courbe, n'est pas perpendiculaire à l'axe de révolution, quelque autre direction qu'elle ait d'ailleurs; 2° celui où cette tangente commune est perpendiculaire à l'axe et où les deux branches se rapprochent de celui-ci en allant vers le point de rebroussement; 3° enfin celui où, la tangente commune étant encore perpendiculaire à l'axe, les deux branches, en allant vers le point de rebroussement, s'éloignent de cet axe.

Premier cas. — En jetant les yeux sur la fig. 12, qui représente, en coupes méridiennes, des portions de la figure liquide pour différentes positions du point de rebroussement par rapport à l'axe de révolution ZZ′, on reconnaîtra sans peine qu'aux environs de ce point, la normale est toujours, pour l'une des branches, dirigée à l'intérieur du liquide et conséquemment positive, tandis que, pour l'autre, elle est dirigée à l'extérieur et conséquemment négative; or l'équation $\frac{1}{M}+\frac{1}{N}=C$ ne saurait comprendre ce changement de signe de la normale N en passant d'une branche à l'autre : car il exigerait qu'au point de rebroussement cette normale fût nulle ou infinie, et,

Z

Z′

Fig. 12.

dans le cas actuel, la normale en question est évidemment finie, puisque la tangente n'est pas perpendiculaire à l'axe, et que le point de rebroussement ne peut être sur celui-ci.

Deuxième cas (*fig.* 13). — Si le point de rebroussement est de seconde espèce, c'est-à-dire si les deux branches qui y aboutissent sont situées du même côté de la tangente commune, on voit que, pour l'une de ces branches, la normale et le rayon de courbure sont tous deux positifs, tandis que, pour l'autre, ils sont tous deux négatifs; la quantité $\frac{1}{M}+\frac{1}{N}$ changerait donc de signe en passant de l'une à l'autre, et ainsi ne serait plus la même dans toute l'étendue de la figure liquide.

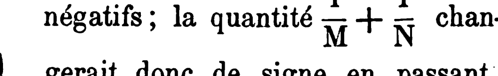




Fig. 13.

Si le point de rebroussement est de première espèce, c'est-à-dire si les deux branches sont situées des deux côtés opposés de la tangente commune, le rayon de courbure y est, comme on sait, nul ou infini; mais un rayon de courbure nul rendrait infinie la quantité $\frac{1}{M}+\frac{1}{N}$, en sorte que nous n'avons à examiner que l'hypothèse d'un rayon de courbure infini. Alors, comme, d'après la direction de la tangente, la normale est également infinie au point que nous considérons, la quantité $\frac{1}{M}+\frac{1}{N}$ se réduirait à zéro au même point; il faudrait donc, pour l'équilibre, que cette quantité fût nulle aussi en tous les autres points de la ligne méri-

dienne ; or cela est impossible, puisque, dès qu'on s'écarte du point de rebroussement, le rayon de courbure et la normale prennent, sur chacune des deux branches en particulier, des valeurs finies et de même signe.

Troisième cas (*fig.* 14). — Si le point de rebroussement est de seconde espèce, le rayon de courbure a des signes opposés sur les deux branches, et conséquemment il doit être nul ou infini au point en question; mais, nous l'avons déjà fait remarquer, nous n'avons pas à nous occuper de l'hypothèse d'un rayon de courbure nul; reste donc celle d'un rayon de courbure infini. Alors, la normale au même point étant de son côté infinie, l'équilibre exige, comme plus haut, que la quantité $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$ soit nulle pour tous les points de la ligne méridienne. Ici la chose semble possible au premier abord, puisque, aux environs du point de rebroussement, le rayon de courbure et la normale sont, sur chaque branche considérée isolément, de signes contraires; mais nous verrons ci-après que cette possibilité n'est qu'apparente.

z

z'

Fig. 14.

Si le point de rebroussement est de première espèce, le rayon de courbure y est nécessairement nul ou infini, ainsi que nous l'avons déjà rappelé ; et, puisque nous devons rejeter les rayons de courbure nuls, la quantité $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$ est encore égale à zéro au point dont il s'agit, et doit l'être aussi en tous les autres points, ce qui paraît possible comme précédemment, et pour la même raison.

Mais pour qu'en tous les points de la ligne méridienne la quantité $\frac{1}{M}+\frac{1}{N}$ soit nulle, il faut évidemment qu'en chacun de ces points le rayon de courbure soit égal et opposé à la normale ; or il est bien connu des géomètres qu'une seule courbe jouit de cette propriété, et que cette courbe est la *chaînette*, laquelle n'a aucun point de rebroussement.

§ 39. Les principes établis dans les deux paragraphes précédents ayant écarté de la question de nos lignes méridiennes les complications qui seraient venues l'embarrasser, nous pouvons entrer plus directement en matière.

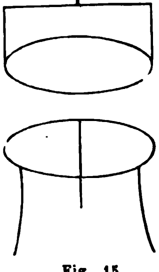
Il suit évidemment de la formule [4] que le cylindre fait partie des figures d'équilibre de révolution ; dans celui-ci, en effet, la ligne méridienne étant une droite parallèle à l'axe, M est partout infini, ce qui réduit le premier membre de la formule au terme $\frac{1}{N}$, et ce terme est constant, puisque la normale N est le rayon du cylindre.

Le cylindre, dans son état complet, s'étend indéfiniment dans le sens de l'axe ; mais, d'après ce que nous avons exposé (§ 35), nous pourrons en réaliser une portion.

Avant de décrire cette réalisation ainsi que celle des figures ultérieures, j'insiste de nouveau sur l'ensemble des précautions dont j'ai déjà parlé, et qui sont d'une absolue nécessité, surtout dans les expériences de ce genre ; je rappelle donc qu'il faut : 1° n'employer les deux liquides, mélange alcoolique et huile, que rendus mutuellement inertes, ou à très-peu près (§ 6) ; 2° quand on va verser l'huile, entourer de plusieurs doubles

d'étoffe le flacon qui la contient, afin d'écarter l'influence de la chaleur de la main (§ 9); 3° donner de grands soins à l'ajustement des densités (§§ 6 et 9); on croirait difficilement, sans l'avoir expérimenté, combien des différences minimes affectent les figures un peu grandes; 4° soigner de même l'homogénéité de l'huile qui constitue la masse immergée (§ 30); 5° enfin opérer dans un lieu dont la température soit, autant que possible, constante (§ 7); si elle varie un peu pendant la durée des expériences, et si la régularité des figures s'en ressent, rétablir l'égalité des de nsités. Je répète aussi qu'avec ces précautions, qui deviennent en peu de temps familières, les expériences s'exécutent sans peine, et donnent des résultats parfaitement réguliers.

§ 40. Procédons maintenant à la réalisation du cylindre. Le système solide que nous emploierons dans ce but, consiste en deux anneaux horizontaux en fil de fer, égaux entre eux, et ayant, par exemple, 7 centimètres de diamètre (fig. 15). L'un de ces anneaux repose, par trois petits pieds, sur le morceau d'étoffe qui couvre le fond du vase (§ 9), et l'autre est fixé, par la queue de sa fourche, au bas de la tige cylindrique.


Fig. 15.

Après avoir soulevé autant que possible l'anneau supérieur, faisons glisser d'une petite quantité la plaque couvercle pour ménager une ouverture au haut du vase, et, par celle-ci, introduisons obliquement le bec d'un petit entonnoir, bec qui doit être assez long; puis versons doucement l'huile en quantité telle qu'elle forme une sphère d'environ un décimètre de diamètre. Enlevons l'entonnoir, et conduisons la sphère liquide vers l'anneau

inférieur, de manière à la faire adhérer à tout le contour de ce dernier; faisons glisser le couvercle en sens contraire, pour refermer le vase, et amener l'anneau supérieur bien exactement au-dessus de l'autre [1]. Abaissons ensuite cet anneau supérieur jusqu'à ce qu'il vienne se mettre en contact avec la masse d'huile, et que celle-ci y adhère également. La masse étant ainsi attachée aux deux anneaux, soulevons lentement le supérieur: alors la portion de la figure liquide comprise entre eux s'allongera en se rétrécissant, et l'on atteindra un point où cette portion de figure sera parfaitement cylindrique; on aura de la sorte un cylindre exact ayant 7 centimètres de diamètre et 12 à 14 de hauteur (*fig.* 16).

Fig. 16.

Seulement les deux bases de la figure ne sont pas planes; leurs surfaces constituent des calottes sphériques convexes, et ceci est une conséquence nécessaire de la théorie. En effet, d'après la notation que nous avons adoptée, la pression correspondante à un point quelconque de la surface cylindrique a pour mesure $P + \frac{A}{2} \cdot \frac{1}{N}$; et comme la courbure $\frac{1}{N}$ est positive, puisque la normale N est dirigée à l'intérieur du liquide, la pression dont il s'agit est supérieure à celle d'une surface plane; or il faut évidemment, pour l'équilibre de la masse, que les surfaces des bases exercent, en chaque point, une pression égale à la précédente, et, par suite, supérieure aussi à celle d'une surface plane, condition qui exige qu'elles soient convexes.

(1) Disons ici, une fois pour toutes, que c'est à l'aide de manœuvres analogues qu'on effectue la réalisation de la plupart des figures dont nous nous occuperons.

Dans cette expérience, on le voit, le système solide consiste en de simples fils de fer. On pourrait se servir de disques au lieu d'anneaux; mais, avec ces derniers, le résultat est bien plus curieux, et il offre d'ailleurs, comme je viens de le montrer, une nouvelle vérification de la théorie.

Si, dans cette même expérience, les densités des deux liquides ne sont pas tout à fait égales, on en est averti par le fait que la figure prend, d'une manière plus ou moins prononcée, l'une des deux formes de la *fig.* 17; on corrige alors le petit défaut d'ajustement.



Fig. 17.

Enfin, si l'on éprouve quelque difficulté à former une sphère d'huile d'un décimètre sans qu'elle aille toucher la paroi latérale du vase, rien n'empêche de s'arrêter à un diamètre moindre ; le cylindre sera alors moins haut, mais on pourra, si l'on veut, y ajouter de l'huile, et hausser ensuite l'anneau supérieur jusqu'à ce qu'on reproduise la figure cylindrique.

§ 41. Le résultat que nous venons d'obtenir va nous permettre d'arriver à une vérification numérique. Il est aisé de déduire de la théorie le rayon des sphères auxquelles les bases appartiennent ; en effet, si nous le représentons par x, la pression correspondante à un point de la surface de ces bases aura (§ 18) pour valeur $P + A \cdot \frac{1}{x}$; et puisque cette pression doit être égale à

celle qui correspond à un point de la surface cylindrique, nous pourrons poser :

$$P + A \cdot \frac{1}{x} = P + \frac{A}{2} \cdot \frac{1}{N};$$

d'où nous déduirons :

$$x = 2N.$$

Ainsi le rayon des sphères dont les bases font partie, est égal au diamètre du cylindre.

D'après cela, connaissant ce diamètre, qui est le même que celui des anneaux, on peut calculer la hauteur théorique des calottes, puis mesurer, dans la figure, au moyen du cathétomètre, la hauteur réelle, et comparer les résultats. C'est ce que j'ai fait, comme on va le voir.

§ 42. Si l'on imagine la figure liquide coupée par un plan méridien, la section de chacune des calottes sera un arc appartenant à un cercle dont le rayon devra, d'après ce qui précède, être égal à 2N, et la flèche de cet arc sera la hauteur de la calotte. Si l'on suppose infiniment minces les fils métalliques qui forment les anneaux, de manière que chacune des calottes s'appuie sur la circonférence même du cylindre, la corde de l'arc ci-dessus sera aussi égale à 2N, et si l'on désigne par h la hauteur des calottes, on aura :

$$h = N(2 - \sqrt{3}) = 0,268 \cdot N.$$

Or le diamètre extérieur exact de mes anneaux, ou la valeur de 2N correspondante à mes expériences, était de $71^{mm},4$, ce qui donne $h = 9^{mm},57$.

Mais les fils métalliques ayant une certaine épaisseur, et les calottes ne s'appuyant pas sur la circonférence extérieure des anneaux, il en résulte que la corde de l'arc méridien est un peu moindre que 2N, et que, par conséquent, la hauteur théorique réelle des calottes est

un peu plus petite que ne le donne la formule précédente. Pour la déterminer exactement, désignons la corde par $2c$, ce qui donnera :

$$h = 2N - \sqrt{4N^2 - c^2}.$$

Maintenant, remarquons que le plan méridien coupe chacun des anneaux suivant deux petits cercles auxquels est tangent l'arc méridien de la calotte, et sur chacun desquels la corde de cet arc intercepte un petit segment. Or, l'arc méridien étant tangent aux sections des fils, il en résulte que les petits segments ci-dessus sont semblables à celui de la calotte ; et comme la corde de ce dernier diffère fort peu du rayon du cercle auquel l'arc appartient, les cordes des petits segments pourront être considérées comme égales au rayon des petites sections, rayon que nous désignerons par r. Il est visible, en outre, que l'excès du rayon extérieur de l'anneau sur la demi-corde c n'est autre chose que l'excès du rayon r sur la demi-corde des petits segments, demi-corde qui, d'après ce qui précède, est égale à $\frac{1}{2}r$. On déduit donc de là, $N - c = \frac{1}{2}r$. d'où $c = N - \frac{1}{2}r$, et il n'y aura qu'à substituer cette valeur dans la formule précédente, pour avoir la valeur théorique réelle de h. L'épaisseur des fils qui formaient mes anneaux était de $0^{mm},74$, d'où $\frac{1}{2}r = 0^{mm},18$, ce qui donne, pour la hauteur théorique réelle des calottes dans ces circonstances,

$$h = 9^{mm},46.$$

Je ferai remarquer qu'il est difficile de distinguer, dans la figure liquide, la limite précise des calottes, c'est-à-dire les circonférences de contact de leurs surfaces avec

celles des anneaux. Pour écarter cet inconvénient, je n'ai mesuré la hauteur des calottes qu'à partir des plans extérieurs des anneaux, c'est-à-dire, pour chaque calotte, à partir d'un plan perpendiculaire à l'axe de révolution, et s'appuyant sur la surface de l'anneau du côté qui regarde le sommet de la calotte. La quantité ainsi mesurée est évidemment égale à la hauteur totale moins la flèche des petits segments que nous avons considérés plus haut, et, par conséquent, d'après la similitude entre ces petits segments et celui de la calotte, on a, pour déterminer cette flèche que nous désignerons par f, la proportion $\frac{h}{c} = \frac{f}{\frac{1}{2}r}$, ce qui donne, pour notre figure liquide, $f = 0^{mm},05$, d'où

$$h - f = 9^{mm},41.$$

Telle est donc, en définitive, la valeur théorique de la quantité qu'il s'agissait de mesurer.

§ 43. Avant de rapporter les résultats que m'ont donnés les mesures, je dois présenter ici quelques remarques importantes.

Si les densités du mélange alcoolique et de l'huile ne sont pas rigoureusement égales, la masse tend légèrement à monter ou à descendre, et la hauteur de l'une des calottes est alors un peu trop grande, tandis que celle de l'autre est un peu trop petite; mais on comprend que si leur différence est minime, on obtiendra encore un résultat exact en prenant la moyenne entre ces deux hauteurs. On évite ainsi une partie des tâtonnements qu'exigerait l'établissement d'une égalité parfaite entre les deux densités.

Mais une chose à laquelle il faut donner de grands soins, c'est l'homogénéité de chacun des deux liquides.

Pour mêler plus aisément l'huile à l'aide de la spatule de fer, on effectue cette opération quand la masse n'est encore attachée qu'à l'anneau inférieur.

§ 44. Afin d'atténuer encore l'influence d'une différence minime possible entre les deux densités, on n'a donné à la figure liquide qu'une hauteur assez petite. On a mesuré d'abord, au cathétomètre, la distance comprise entre les sommets des deux calottes, puis on a mesuré, par le même moyen, la distance comprise entre les plans extérieurs des deux anneaux. La différence entre le premier et le second résultat donne évidemment la somme des deux hauteurs dont il faut prendre la moyenne, et, par conséquent, cette moyenne, ou la quantité cherchée $h - f$, est égale à la moitié de la différence dont il s'agit.

La mesure de la distance entre les plans extérieurs des anneaux exige quelques précautions particulières. D'abord, comme les points des anneaux auxquels il faut viser ne sont pas tout à fait à la surface extérieure de la figure, l'huile interposée entre ces points et l'œil doit produire des effets de réfraction qui introduiraient une petite erreur dans la valeur obtenue. Pour écarter cet inconvénient, il suffit de mettre les anneaux à nu, en faisant écouler les liquides du vase par le robinet (§ 4), ou au moyen d'un siphon, puis d'enlever les petites portions d'huile qui demeurent adhérentes aux anneaux, en promenant sur ceux-ci une petite bande de papier à filtre; il faut aussi absorber de la même manière les gouttes de liquide alcoolique qui restent attachées à la face interne de la paroi antérieure du vase. Il est inutile de dire que, pour effectuer ces opérations, on découvre une portion du haut du vase, et qu'après les avoir terminées, on replace la plaque couvercle bien exactement dans sa première position.

Voici maintenant les résultats que j'ai obtenus : la distance entre les sommets a été trouvée d'abord, en moyenne, par quatre mesures successives, égale à $76^{mm},79$. Mais le liquide alcoolique ayant été alors agité de nouveau pendant quelque temps, afin que sa parfaite homogénéité fût plus certaine (1), deux nouvelles mesures prises immédiatement après ont donné, en moyenne, $77^{mm},02$.

La distance entre les plans extérieurs des anneaux s'est trouvée en moyenne, du côté droit du système, de $57^{mm},73$, et, du côté gauche, de $57^{mm},86$; prenant donc la moyenne de ces deux résultats, on a, pour la distance entre les centres des plans extérieurs, la valeur $57^{mm},79$.

D'après cela, si l'on part de la première des deux valeurs obtenues pour la distance des sommets, savoir $76^{mm},79$, on trouvera :

$$h - f = \frac{76,79 - 57,79}{2} = 9^{mm},50\,;$$

et si l'on part du second résultat, savoir $77^{mm},02$, on trouvera :

$$h - f = \frac{77,02 - 57,79}{2} = 9^{mm},61.$$

Ces deux hauteurs s'écartent bien peu, comme on le voit, de la hauteur $9^{mm},41$ déduite de la théorie (§ 42) : pour la première, la différence ne s'élève pas au centième de cette valeur théorique, et, pour la seconde, elle en surpasse à peine les deux centièmes.

(1) Si le liquide alcoolique n'est pas bien homogène, et que la figure se trouve dans une couche dont la densité moyenne est égale à celle de l'huile, les deux calottes peuvent se montrer égales, mais leur hauteur est trop petite; en effet, l'huile qui forme la calotte supérieure est alors en contact avec un liquide moins dense qu'elle, et tend par conséquent à descendre, tandis que l'inverse a lieu pour l'huile qui forme la calotte inférieure. En établissant à dessein une hétérogénéité très-prononcée, et en employant les précautions convenables, on peut même réaliser un cylindre sensiblement régulier dont les bases sont tout à fait planes.

Ces légères différences provenaient sans doute de faibles restes d'hétérogénéité dans les liquides ; il est probable que, dans le premier cas, aucun des deux liquides n'était absolument homogène, et que les deux effets contraires qui résultaient de là (§ 30 et note du § actuel), se neutralisaient en partie, tandis que, dans le second cas, le liquide alcoolique étant rendu tout à fait homogène, l'effet de la petite hétérogénéité de l'huile se manifestait en entier.

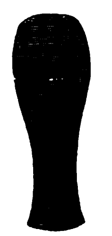
Quoi qu'il en soit, ces mêmes différences sont l'une et l'autre assez minimes pour qu'on puisse considérer l'observation comme d'accord avec la théorie, dont elle offre, comme on voit, une confirmation bien remarquable.

§ 45. Avec des anneaux de 7 centimètres, on ne peut guère, dans notre vase, réaliser un cylindre dont la hauteur surpasse le double du diamètre. Pour avoir un rapport plus considérable, il suffit d'employer des anneaux plus petits, de 3 centimètres, par exemple ; mais, dans ce cas, on observe un phénomène singulier : si la hauteur qu'on veut donner à la figure excède notablement le triple du diamètre des anneaux, on ne parvient plus, quelques soins que l'on prenne, à obtenir la forme cylindrique ; avant que celle-ci soit atteinte, la figure se sépare toujours spontanément en deux portions inégales qui demeurent respectivement attachées aux deux anneaux.

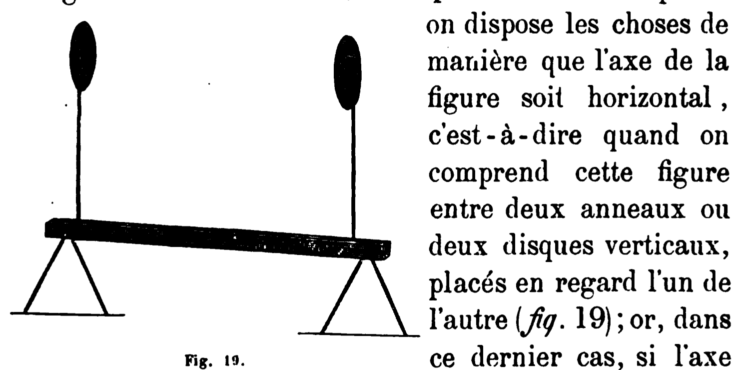
Pour faire ces expériences, le moyen le plus commode est de donner à la sphère d'huile un diamètre trop grand, de manière que, lorsque l'anneau supérieur est soulevé à la hauteur qu'on s'est proposée, la ligne méridienne de la portion de figure comprise entre les deux anneaux soit assez fortement convexe, puis d'essayer d'absorber l'excès d'huile. Seulement, comme l'introduction du bec de la seringue exige qu'on ménage une ouverture au

haut du vase, on fait en sorte que la figure liquide ne soit pas tout à fait dans l'axe de ce dernier, et qu'ainsi la plaque couvercle se trouve un peu reculée. J'avertis, dès à présent, que, toutes les figures qui me restent à décrire nécessitant l'emploi de la seringue, il faut, à leur égard, recourir à la même disposition.

Maintenant, précisons d'avantage ce qui arrive quand la distance des deux anneaux l'emporte notablement sur le triple de leur diamètre : toujours, avant que la convexité méridienne ait disparu, on voit la figure liquide s'amincir sur l'une des moitiés de sa hauteur, tandis qu'elle se renfle sur l'autre moitié (*fig.* 18) ; ces modifications se prononcent de plus en plus, jusqu'à ce que le milieu de la partie étranglée soit devenu très-mince ; alors la figure se désunit en ce point, et se trouve ainsi partagée en deux portions.


Fig. 18.

§ 46. On pourrait soupçonner que le phénomène est dû à un reste minime de différence entre les densités des deux liquides ; mais, outre qu'il se produit invinciblement, comme je l'ai dit, quelque soin qu'on ait apporté à l'égalisation des densités, il se produit de même quand on dispose les choses de manière que l'axe de la figure soit horizontal, c'est-à-dire quand on comprend cette figure entre deux anneaux ou deux disques verticaux, placés en regard l'un de l'autre (*fig.* 19) ; or, dans ce dernier cas, si l'axe est bien horizontal, une différence entre les densités ne


Fig. 19.

peut évidemment tendre à déterminer un transport de l'huile en plus grande abondance vers l'une des bases.

De tout cela on doit conclure qu'un cylindre liquide dans lequel le rapport de la longueur au diamètre est notablement supérieur à 3, constitue une figure d'équilibre instable. Je me borne, pour le moment, à signaler ce fait remarquable, qui sera étudié avec détail dans le chapitre IX.

Ainsi, quand on voudra réaliser un cylindre liquide, il faudra faire en sorte que le rapport entre la distance des anneaux ou des disques et leur diamètre ne dépasse pas 3. Ajoutons que l'expérience est beaucoup plus facile pour un cylindre horizontal que pour un cylindre vertical, parce que, à l'égard du premier, une trace de différence entre les densités n'a pas d'influence sensible sur la régularité de la figure. Pour réaliser celle-ci dans l'appareil de la *fig.* 19, on attache d'abord à la face interne de l'un des disques, une masse d'huile d'un volume supérieur à celui que doit comprendre le cylindre; puis, à l'aide d'un anneau en fil de fer de même diamètre que les disques et porté par un fil de fer droit plus épais dont on tient à la main l'extrémité libre, on étire sans peine la masse jusqu'au second disque, auquel on la fait adhérer également; on absorbe alors l'excès d'huile, jusqu'à ce que la figure soit exactement cylindrique.

Enfin, dans le cas d'un auditoire, on fera usage d'un système solide semblable au précédent, mais sans pieds, et soutenu dans une position renversée, comme celui de la *fig.* 7 du § 21, par un fil de fer de suspension; de cette manière, on peut abaisser ou soulever l'ensemble dans le mélange alcoolique rendu légèrement hétérogène.

§ 47. Dans l'expérience du § 40, si l'on arrête l'anneau supérieur avant que la forme cylindrique soit atteinte,

la portion de figure comprise entre les deux anneaux, portion qui est toujours parfaitement symétrique autour de l'axe, n'appartient plus à la sphère, et n'appartient pas encore au cylindre; elle fait donc partie d'une nouvelle figure d'équilibre de révolution. De même si, après avoir obtenu le cylindre exact, on soulève encore d'une certaine quantité l'anneau supérieur, la figure s'étrangle plus ou moins au milieu de sa hauteur, et, si l'on arrête alors l'anneau, elle demeure en cet état, sans cesser d'être de révolution; alors aussi, par conséquent, elle constitue une portion d'une figure d'équilibre différente de la sphère et du cylindre.

Pour arriver à déterminer ce que doivent être, dans leur état complet, les figures liquides auxquelles appartiennent les portions dont il s'agit, décrivons d'abord une expérience.

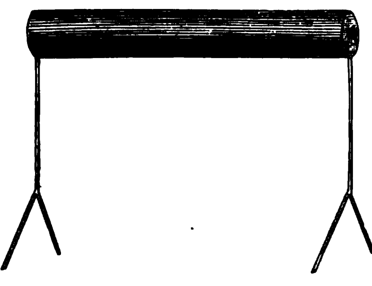


Fig. 20.

Prenons pour système solide un cylindre en fer d'une longueur assez considérable relativement au diamètre, porté sur deux pieds en fils de même métal (*fig.* 20); supposons, par exemple, la longueur de 14 centimètres, et le diamètre de 2. Ce cylindre étant soigneusement frotté d'huile et introduit dans le vase, amenons en contact avec le milieu de sa longueur une sphère d'huile d'un volume convenable. L'adhérence une fois établie, la masse liquide s'étend sur la surface du cylindre de manière à envelopper une portion de la longueur de

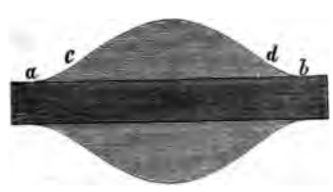


Fig. 21.

celui-ci, perd sa forme sphérique, et constitue enfin une figure de révolution dont la ligne méridienne change de courbure en allant vers ses deux extrémités, pour devenir, en ces deux points, tangente à la génératrice du cylindre. La *fig.* 21 représente la coupe méridienne de la figure liquide et du cylindre solide.

Mais nous savons que lorsque la masse liquide adhère à un système solide qui en modifie la forme, les seules parties de ce système d'où dépend la figure produite, sont les lignes très-étroites suivant lesquelles il est rencontré ou touché par la couche superficielle de la masse, en sorte qu'il peut en général se réduire à de simples fils de fer représentant ces mêmes lignes. Or, dans la figure dont il s'agit ici, la surface libre de la masse liquide touche notre cylindre solide suivant deux circonférences perpendiculaires à l'axe, et passant par les points *a* et *b*; rien n'empêche donc de concevoir le cylindre entier remplacé par deux anneaux représentant ces circonférences, c'est-à-dire ayant un diamètre extérieur égal à celui du cylindre, placés verticalement en regard l'un de l'autre, et distants entre eux de l'intervalle *ab*. Seulement il faudra que la quantité d'huile soit plus grande, afin de suppléer au volume de la portion du cylindre supprimée à l'intérieur de la masse ; il faudra même encore un peu d'huile en sus, pour fournir la matière des deux bases qui s'appuient sur les anneaux, bases dont les surfaces seront, comme nous le verrons bientôt, des calottes sphériques convexes. Du reste, pour éviter ces dernières, qui compliqueraient inutilement la figure, on peut supposer des disques au lieu d'anneaux ; dans l'un

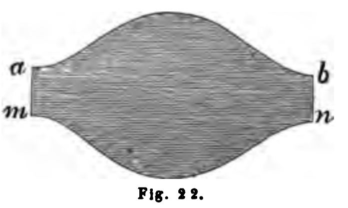


Fig. 22.

et l'autre cas, la figure sera alors entièrement formée d'huile ; elle est représentée dans cet état, en coupe méridienne ou en projection verticale, par la *fig.* 22 ; *am* et *bn* sont les coupes ou les projections des disques.

Nous dirons bientôt pour quelles raisons nous avons indiqué l'emploi d'un cylindre plutôt que celui de disques ou d'anneaux.

§ 48. La figure que nous venons d'obtenir, et dans laquelle la ligne méridienne s'arrête aux points *a* et *b* où elle touche le cylindre solide (*fig.* 21), ou rencontre les bords des disques (*fig.* 22), ne constitue évidemment qu'une portion de la figure d'équilibre complète. Essayons donc de poursuivre la ligne méridienne, à partir de ces mêmes points *a* et *b* où ses éléments sont parallèles à l'axe.

Il est aisé de faire voir que les points *a* et *b* ne sont pas des points d'inflexion. En de semblables points, le rayon de courbure est nul ou infini ; mais puisque, dans nos lignes méridiennes, il ne peut être question d'un rayon de courbure nul, qui rendrait infini le premier membre de l'équation de l'équilibre, il faudrait supposer ce rayon infini aux points que nous considérons, et l'équation s'y réduirait à $\frac{1}{N} = C$; or les points *c* et *d* (*fig.* 21) sont réellement des points d'inflexion de ce genre, comme le montre l'aspect de la figure, en sorte que l'équation de l'équilibre s'y réduit nécessairement à $\frac{1}{N} = C$; la normale N devrait donc avoir, aux points *a* et *b*, la même longueur qu'aux points *c* et *d*, ce qui évidemment n'est pas : car d'abord les points *c* et *d* sont plus éloignés de l'axe que les points *a* et *b*, et, en outre, les normales qui partent des premiers sont obliques

à l'axe, tandis que celles qui correspondent aux seconds lui sont perpendiculaires.

Au delà des points *a* et *b* la courbe commence donc par garder une courbure de même sens qu'en deçà, c'est-à-dire une courbure concave vers l'extérieur (*fig.* 23). Or supposons que, sur le prolongement partant de *a*, par exemple, cette courbure aille d'abord soit en augmentant, soit en diminuant moins qu'elle ne diminue de l'autre côté de *a* ; nous pourrons toujours prendre, sur le

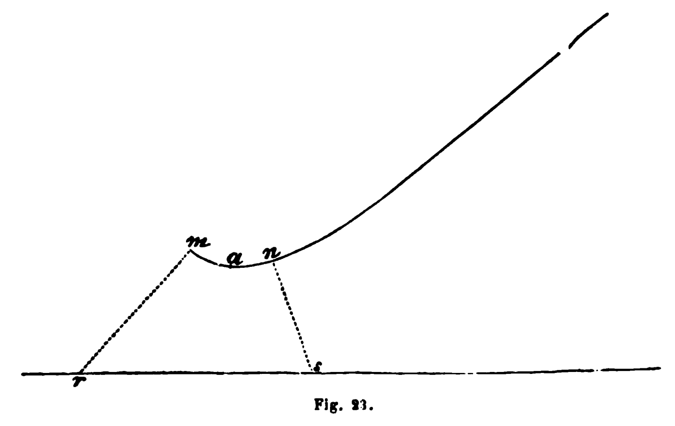


Fig. 23.

prolongement dont il s'agit, une portion *am* assez petite pour qu'en chacun de ses points, la courbure soit plus forte qu'aux points correspondants d'une portion *an* de même longueur prise sur la première partie de la courbe. En vertu de la supériorité de courbure de tous les points de l'arc *am*, le point *m* est nécessairement plus éloigné de l'axe que le point *n*, et, en outre, la normale *mr* qui part du premier est plus oblique à l'axe que la normale *ns* qui part du second ; la normale en *m* est donc, par cette double raison, plus grande que la normale en *n*. D'un autre côté, d'après la même hypothèse relative aux courbures, le rayon de

courbure en *m* est plus petit qu'en *n*. Il résulte de là, qu'en sautant du point *n* au point *m*, le premier terme de la quantité $\frac{1}{M}+\frac{1}{N}$ augmentera et le second diminuera. Or, dans les parties de la courbe que nous considérons, le rayon de courbure et la normale sont opposés l'un à l'autre, et ont conséquemment des signes contraires, de sorte que la quantité $\frac{1}{M}+\frac{1}{N}$ constitue une différence; si donc l'un des termes de cette quantité croît tandis que l'autre décroît, elle ne peut conserver la même valeur, et l'équilibre est impossible.

Si l'on suppose que la courbure de l'arc *am* diminue au contraire plus, à partir de *a*, que celle de l'arc *an*, on conclura, par le même mode de raisonnement, que la quantité $\frac{1}{M}+\frac{1}{N}$ changerait aussi de valeur en passant de l'une des parties de la courbe à l'autre.

L'hypothèse de courbures plus fortes ou plus faibles dans l'arc *am* que dans l'arc *an* est donc incompatible avec l'équation de l'équilibre; il faut conséquemment, pour satisfaire à cette équation, que, sur le petit prolongement *am*, les courbures soient identiquement les mêmes que sur un arc *an* de même longueur pris en deçà de *a*. Or il est clair que cette identité entraîne celle de toute la partie de la courbe située au delà du point *a* avec la partie située en deçà. La portion de courbe comprise entre *a* et *b* (*fig.* 21 et 22) se reproduira donc au delà de *a*, puis, par les mêmes raisons, se reproduira encore, et ainsi de suite indéfiniment, et il en sera de même de l'autre côté du point *b*, de sorte que la ligne méridienne sera une courbe ondulée s'étendant à l'infini le long de l'axe, dont elle se rapproche et s'éloigne périodiquement de quantités égales.

La figure d'équilibre complète se prolonge donc à l'infini le long de l'axe, et se compose d'une suite régulière de renflements et d'étranglements égaux ; la *fig.* 24

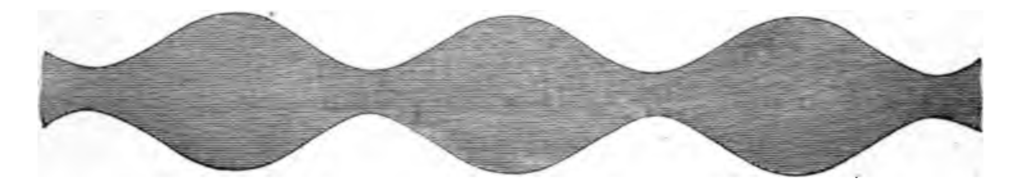


Fig. 24.

en représente une coupe méridienne sur une certaine étendue.

Afin d'abréger le langage, nous donnerons à cette figure le nom d'*Onduloïde*, tiré de la forme de sa ligne méridienne.

§ 49. Il est aisé de comprendre comment l'équilibre peut exister dans une semblable figure, bien que, sur les parties renflées, les deux courbures principales soient convexes, tandis que, sur les parties étranglées, l'une des courbures principales, la méridienne, est concave, et l'autre convexe : c'est que, sur ces dernières parties, la courbure convexe ou positive est plus forte que la courbure concave ou négative, de manière que la courbure moyenne en chaque point est positive (§ 33), et égale à celle qui correspond aux différents points des parties renflées.

De ce que, dans l'onduloïde, la courbure moyenne est positive, il résulte nécessairement que toutes les fois que l'on réalisera une portion quelconque d'onduloïde entre deux anneaux, les bases qui s'appuieront sur ceux-ci seront des calottes sphériques convexes.

§ 50. Si, dans l'expérience du § 47, le volume de l'huile demeurant le même, on emploie un cylindre solide

d'un plus grand diamètre, la masse liquide s'étend davantage dans le sens de l'axe, et les courbures méridiennes diminuent, de sorte que, dans la figure complète correspondante, les renflements et les étranglements sont moins prononcés. Les courbures méridiennes s'effacent ainsi d'autant plus dans la figure partielle, et, par suite, dans la figure complète, que le diamètre du cylindre solide est plus grand ; d'où l'on voit que, dans ces variations, la figure complète tend vers la forme cylindrique, qui peut être considérée comme la limite de ces mêmes variations.

Si, le volume de l'huile demeurant toujours le même,

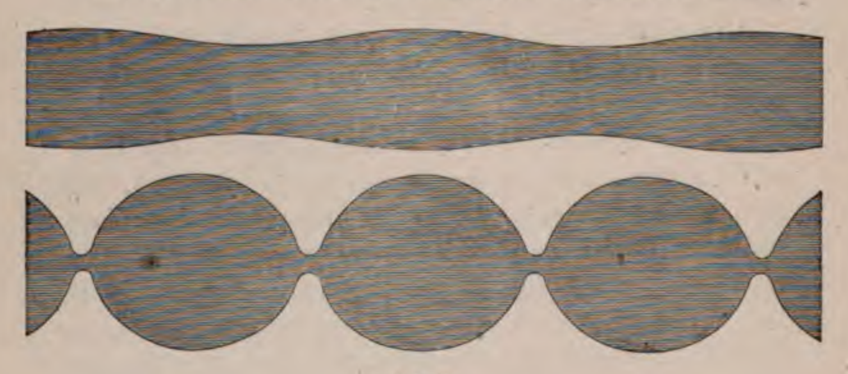


Fig. 25.

on emploie, au contraire, un cylindre solide d'un diamètre plus petit, la masse liquide se raccourcit dans le sens de l'axe, les courbures méridiennes augmentent, et la figure se rapproche de plus en plus d'une sphère ; lorsque, par exemple, pour une masse d'huile constituant primitivement une sphère de 6 centimètres de diamètre, on prend, comme cylindre solide, un fil de fer de deux millimètres d'épaisseur, la masse a déjà presque exactement la forme sphérique, et, si l'on se sert d'un fil très-fin, la différence d'avec la forme sphérique devient

tout à fait insensible. Maintenant, la figure complète variant de cette même manière dans toutes ses parties, les renflements et les étranglements y seront de plus en plus prononcés, et, à la dernière limite, on comprend qu'elle consistera en une suite de sphères égales tangentes les unes aux autres sur l'axe.

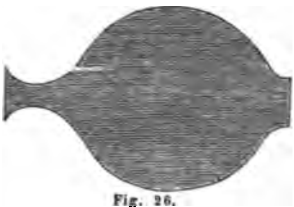
L'onduloïde complet peut donc varier de forme entre deux limites très-éloignées, qui sont, d'une part, le cylindre, et, de l'autre, une suite de sphères égales qui se touchent sur l'axe. La *fig.* 25 représente deux onduloïdes dont l'un diffère peu du cylindre, et dont l'autre se rapproche de la série de sphères.

§ 51. Mais l'onduloïde est susceptible d'un autre genre de variation, qui donne une troisième limite. Supposons un vase semblable au nôtre et de dimensions beaucoup plus grandes ; plaçons-y horizontalement, au sein du liquide alcoolique, un cylindre solide de deux centimètres de diamètre, par exemple, d'une longueur considérable, et porté sur des pieds suffisamment élevés. Faisons adhérer à ce cylindre une masse d'huile qui produise une portion d'onduloïde pareille à celle de la *fig.* 21, puis ajoutons une nouvelle quantité d'huile ; la figure augmentera alors en longueur en même temps qu'en épaisseur ; mais poussons-la légèrement d'un côté, de manière que l'une de ses extrémités soit ramenée au même endroit qu'auparavant, et que l'autre seule se trouve reculée. Si nous ajoutons ainsi successivement de nouvelles quantités d'huile, en ramenant toujours la première extrémité de la figure à la même place, cette figure prendra de plus en plus d'épaisseur, et sa seconde extrémité reculera de plus en plus ; et comme nous pouvons imaginer le vase aussi grand et le cylindre aussi allongé que nous le voulons, rien ne met un terme à la possibilité théorique de l'accroisse-

ment de la figure en épaisseur ainsi qu'en longueur. Si donc nous supposons cet accroissement porté jusqu'à l'infini, le sommet de l'arc méridien convexe et la seconde extrémité de la figure n'existeront plus, en sorte que la ligne méridienne ira en s'éloignant indéfiniment de l'axe à partir de la première extrémité ; et puisque celle-ci constitue, dans la figure complète, le cercle de gorge d'un étranglement, et que des deux côtés d'un étranglement tout est parfaitement symétrique (§ 48), on voit que la ligne méridienne complète se réduira à une simple courbe à deux branches infinies, comme la parabole, ayant son axe de symétrie perpendiculaire à l'axe de révolution ; par conséquent, la figure complète engendrée se réduira elle-même à un étranglement unique s'étendant indéfiniment de part et d'autre de son cercle de gorge. Nous connaîtrons bientôt d'une manière précise la nature de cette troisième limite de l'onduloïde.

§ 52. Revenons maintenant à l'emploi de deux disques pour la réalisation de la portion d'onduloïde comprise entre les milieux de deux étranglements voisins (§ 47). Quand on essaie cette réalisation, en attachant aux deux disques une masse d'huile plus grande que celle qui doit constituer la figure, puis absorbant graduellement l'excès au moyen de la petite seringue, l'opération marche sans difficulté tant que les éléments de la ligne méridienne qui aboutissent aux bords des disques s'écartent notablement du parallélisme avec l'axe ; mais lorsqu'ils sont près d'atteindre ce parallélisme, ou, en d'autres termes, lorsqu'on approche de la portion d'onduloïde que l'on veut obtenir, il faut agir avec plus de précaution, sans quoi la figure pourrait s'altérer spontanément et se désunir. En conduisant l'opération avec ménagement, et en n'enlevant, vers la fin, l'huile que par quantités fort petites,

on parvient, autant que l'œil peut en juger, à la portion d'onduloïde cherchée (*fig.* 22), portion qui varie de forme en se rapprochant ou en s'éloignant du cylindre, suivant que le diamètre des disques est plus grand ou plus petit par rapport à leur distance ; mais alors la cause la plus légère, telle qu'un petit mouvement imprimé à la masse par le bec de la seringue, suffit pour déterminer l'altération graduelle,


Fig. 26.

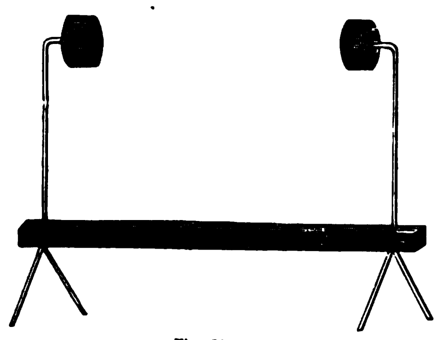
puis la destruction de la figure : on voit celle-ci s'amincir près de l'un des disques, cet amincissement se prononce de plus en plus, l'huile se porte en plus grande quantité du côté de l'autre disque (*fig.* 26), et la masse finit par se séparer en deux parties.

De ce que, dans la figure ainsi obtenue, une altération occasionnée par une cause minime progresse ensuite spontanément, on doit inférer que la portion de l'onduloïde comprise entre le milieu d'un étranglement et celui de l'étranglement suivant est à la limite de la stabilité.

On comprend, d'après ce que nous venons d'exposer, pourquoi, dans le § 47, nous avons prescrit l'adoption d'un cylindre comme système solide : avec des disques, il faut des tâtonnements et des soins particuliers pour arriver sans accidents jusqu'au point où les derniers éléments de la ligne méridienne sont ou paraissent parallèles à l'axe, tandis qu'avec le cylindre, la figure est parfaitement stable, et le parallélisme voulu s'établit de de lui-même. Mais il reste à expliquer comment la stabilité de la figure peut dépendre des deux circonférences suivant lesquelles la couche superficielle de la masse touche le cylindre (ibid.). La chose est très-simple : dans le cas des disques, lorsqu'il arrive, comme nous l'avons

dit, que la figure s'amincit spontanément d'un côté, les éléments de la couche superficielle qui aboutissent au bord du disque près duquel cet effet a lieu, s'inclinent vers l'axe (*fig.* 26); or, dans le cas du cylindre, les derniers éléments de la couche superficielle ne sauraient s'incliner ainsi, puisqu'ils sont appliqués sur la surface du solide.

Cette explication suggère naturellement l'idée de substituer aux disques minces des disques épais, ou plutôt des portions de cylindre : car, en donnant d'abord à la masse un volume suffisant pour que l'huile atteigne les bords des faces de ces derniers disques opposées à celles qui se regardent, puis en enlevant du liquide jusqu'à ce que les circonférences de contact se trouvent sur l'épaisseur de ces mêmes disques, la cause de stabilité ci-dessus indiquée existera évidemment tout aussi bien qu'avec un cylindre continu. Or c'est ce que l'expérience confirme pleinement: les disques dont je me suis servi avaient chacun 15 millimètres de diamètre, et 8 d'épaisseur, et ils étaient maintenus à 90 millimètres l'un de l'autre; tout le système est représenté *fig.* 27. En faisant adhérer à leur ensemble une masse d'huile d'abord trop grande, enlevant ensuite l'excès, et poussant légèrement la masse à droite ou à gauche avec le bec de la seringue, de manière que les points d'où la ligne méridienne paraissait partir fussent à peu près à égale distance des deux bases de chaque disque, la figure pro-


Fig. 27.

duite s'est montrée parfaitement stable ; on a pu, en continuant à absorber de petites quantités d'huile, amener les extrémités de la ligne méridienne très-près des bords des bases solides en regard, sans que la figure perdît de sa stabilité, et ce n'est que lorsqu'elles ont paru atteindre ces bords mêmes, que l'instabilité s'est manifestée.

§ 53. Puisque la portion d'onduloïde dont nous nous occupons se trouve déjà à la limite de la stabilité lorsqu'elle est formée entre deux disques minces, et qu'ainsi elle est libre dans toute son étendue à l'exception de ses seules bases, il serait inutile de chercher à réaliser une portion d'onduloïde également libre qui dépasserait de part et d'autre les milieux de deux étranglements, et l'on en conclura que l'onduloïde indéfini est, comme le cylindre indéfini, une figure d'équilibre instable.

§ 54. Il est aisé de voir maintenant que les figures bombées qui s'obtiennent (§ 40) lorsque, après avoir attaché une sphère d'huile à deux anneaux horizontaux, égaux en diamètre et placés l'un au-dessus de l'autre, on soulève l'anneau supérieur d'une quantité moindre que celle qui donne à la masse la forme cylindrique, ne sont autre chose que des portions de renflements d'onduloïde ; seulement, quand on produit ces figures bombées par le procédé que nous venons de rappeler, elles sont placées de manière que leur axe soit vertical.

En effet, concevons un onduloïde réalisé au moyen de deux disques épais (§ 52), et conséquemment à l'état d'équilibre stable, et imaginons qu'on place, à des distances égales à droite et à gauche du milieu de cette figure, entre ce milieu et les disques épais, deux anneaux solides verticaux ayant leurs centres sur l'axe et leurs contours extérieurs précisément à la surface de la masse ; il est clair que ces anneaux ne détruiront pas l'équilibre

de la figure ; or, si l'on suppose que les parties de la figure situées au delà des anneaux soient remplacées par des calottes sphériques convexes s'appuyant sur ces derniers, et dont la courbure soit telle qu'elle détermine une pression égale à celle qui appartient au reste de la figure, l'équilibre existera évidemment encore, et il sera encore parfaitement stable, puisque la distance des anneaux est moindre que celle qui correspond à la limite de la stabilité. Mais alors, si les anneaux ne sont pas assez écartés pour que la portion de la ligne méridienne qui s'étend de l'un à l'autre contienne les points d'inflexion, il est visible que l'ensemble constituera l'une des figures bombées dont il s'agit ; car, d'après les différentes formes de l'onduloïde, la ligne méridienne de la portion comprise entre les anneaux peut varier depuis un arc de cercle ayant son centre sur l'axe, jusqu'à une ligne droite, comme dans ces mêmes figures bombées. Pour que celles-ci ne fussent point des portions d'onduloïde, il faudrait qu'entre les mêmes anneaux placés à une même distance l'un de l'autre, et avec une même masse d'huile, il y eût deux figures d'équilibre possibles, toutes deux à l'état stable ; or c'est ce que dément l'expérience : si, après avoir transformé une sphère d'huile en l'une des figures bombées en question, soit par l'augmentation de l'écartement des anneaux, soit par la soustraction d'une certaine quantité de liquide, on agite le mélange alcoolique de manière à imprimer à la masse d'huile des mouvements considérables, mais pas assez cependant pour la désunir, et qu'ensuite on la laisse revenir au repos, elle reprend toujours identiquement la même forme.

On voit également que, dans les expériences du § 52, la figure liquide, quand l'huile est encore en excès, constitue déjà aussi une portion d'onduloïde.

§ 55. Passons aux figures que prend la masse quand l'écartement des anneaux excède celui qui correspond à la forme cylindrique.

Si, après avoir formé entre deux anneaux un cylindre vertical dont la hauteur soit beaucoup moindre que celle qui correspondrait à la limite de la stabilité, on soulève un peu l'anneau supérieur, on voit le cylindre se creuser légèrement dans le sens méridien, de manière que la figure présente un étranglement ; si l'on soulève encore l'anneau, l'étranglement s'approfondit davantage, et la figure est toujours parfaitement symétrique de part et d'autre du cercle de gorge, lequel est conséquemment situé au milieu de l'intervalle des anneaux. Si, dans le cylindre d'où l'on est parti, le rapport entre la hauteur et le diamètre était convenable, on peut, en continuant ainsi, rendre l'étranglement très-prononcé ; et alors la ligne méridienne change le sens de sa courbure en allant vers les anneaux, en sorte qu'elle présente deux points d'inflexion situés à égale distance des deux côtés du cercle de gorge ; alors aussi les bases de la figure conservent leur forme convexe, et même leur courbure augmente plus ou moins. Dans cette expérience, il y a toujours, on le conçoit, une limite d'écartement des anneaux, au-delà de laquelle l'équilibre n'est plus possible ; si on la dépasse, l'étranglement s'amincit spontanément jusqu'à se rompre, et la figure se sépare en deux portions ; mais, pour tout écartement moindre que la limite dont il s'agit, l'équilibre est stable. Le cylindre qui m'a paru donner de la manière la plus prononcée les résultats ci-dessus, est celui dont la hauteur est au diamètre à peu près dans le rapport de 5 à 7 : en employant, par exemple, des anneaux de 70 millimètres de diamètre, il faut former un cylindre d'environ 50 millimètres de hauteur ; l'anneau

supérieur peut alors être soulevé jusqu'à ce qu'il soit distant de l'autre de près de 110 millimètres, et l'on obtient ainsi une figure dans laquelle le cercle de gorge n'a qu'environ 30 millimètres de diamètre.

L'expérience faite par ce procédé exige de grandes précautions : l'égalité des densités des deux liquides et l'homogénéité de l'huile doivent être parfaites, et, lorsqu'on approche de la limite d'écartement des anneaux, il faut agir avec beaucoup de ménagement. Mais on réussit sans difficulté, en disposant les choses de manière que l'axe de révolution soit horizontal : les anneaux de 70 millimètres, qui sont alors verticaux, doivent être placés d'avance à la distance de 110 millimètres l'un de l'autre ; chacun d'eux est fixé, par sa partie inférieure, à un fil de fer vertical, et ces fils sont fixés eux-mêmes, par leurs extrémités inférieures, à une planchette en fer qui supporte tout le système ; enfin ces mêmes fils sont entourés de coton, pour que l'huile ne s'y attache pas (§ 9). On forme d'abord un cylindre entre les deux anneaux[1], puis on diminue graduellement le volume de la masse à l'aide de la petite seringue. Si, lorsque le cercle de gorge n'est plus que d'environ 30 millimètres, on a soin de n'enlever l'huile que par très-petites portions à la fois, on parvient à réduire ce diamètre à 27 millimètres, et l'on obtient ainsi le résultat représenté *fig.* 28.

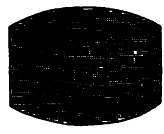

Fig. 28.

Or il est évident que toutes ces figures étranglées et

(1) On effectue cette opération par le moyen indiqué au § 46, c'est-à-dire en attachant d'abord la masse à l'un des anneaux fixes, puis l'étirant vers l'autre à l'aide d'un anneau mobile de même diamètre, et enfin absorbant l'excès d'huile.

à bases convexes, figures qui peuvent, comme celles que nous avons étudiées dans les paragraphes précédents, s'écarter aussi peu du cylindre qu'on le veut, sont encore des portions d'onduloïde, mais prises autrement dans l'onduloïde indéfini : tandis que le milieu des unes est occupé par l'équateur d'un renflement, le milieu des autres est occupé par le cercle de gorge d'un étranglement ; les plus étendues des premières se composent d'un renflement entier entre deux demi-étranglements (*fig.* 21 et 22), et celle que représente la *fig.* 28 se compose d'un étranglement entier entre deux portions de renflements.

§ 56. Maintenant reprenons nos anneaux horizontaux, afin de pouvoir placer à volonté l'anneau supérieur plus près ou plus loin de l'autre ; formons encore un cylindre entre eux, puis, sans changer leur distance, enlevons graduellement de l'huile à la masse. Si le rapport de la distance des anneaux à leur diamètre est beaucoup moindre que dans la dernière expérience du paragraphe précédent, la courbure des bases, au lieu d'aller en augmentant à mesure que l'étranglement s'approfondit, va, au contraire, en diminuant ; et si ce rapport ne dépasse pas $\frac{2}{3}$ environ, on arrive à rendre les bases absolument planes. Pour un rapport moindre encore, on peut même aller plus loin : en continuant à absorber du liquide, on voit les bases devenir concaves : formons, par exemple, entre nos anneaux de 70 millimètres de diamètre, un cylindre de 35 millimètres de hauteur (*fig.* 29) ; par l'absorption graduelle de l'huile, nous verrons les bases s'affaisser de plus en plus en même temps que l'étranglement se creuse, et perdre enfin toute leur courbure, et nous aurons ainsi le résultat repré-


Fig. 29

senté *fig.* 30. Si nous continuions à faire agir la petite seringue, les bases prendraient une courbure concave ; mais, pour le moment, arrêtons-nous lorsqu'elles sont planes.

Fig. 30.

Avec de telles bases, l'étranglement compris entre les anneaux ne peut plus (§ 49) appartenir à l'onduloïde, et nous parvenons conséquemment à une nouvelle figure de révolution. Cherchons donc ce qu'est cette nouvelle figure dans son état complet.

Les bases de notre figure partielle étant planes, et conséquemment à courbure moyenne nulle (§ 2), l'équilibre exige que la surface de la portion comprise entre les deux anneaux, et, par suite, celle de tout le reste de la figure complète, soit aussi à courbure moyenne nulle ; il faut donc qu'on ait partout $\frac{1}{M}+\frac{1}{N}=0$, d'où $M=-N$; et comme les quantités M et N peuvent être considérées comme appartenant toutes deux à la ligne méridienne (§ 36), cette ligne doit être telle qu'en chacun de ses points, son rayon de courbure soit égal et opposé à la normale. Or les géomètres ont démontré que la seule courbe qui jouisse de cette propriété est la *chaînette*(1). La courbe tourne alors son sommet vers l'axe auquel on rapporte les normales, la droite qui la partage symétriquement en deux parties égales est perpendiculaire à cet axe, et le sommet de la courbe est distant de celui-ci d'une quantité égale au rayon de courbure de ce même sommet.

(1) La chaînette est, comme on sait, la courbe que forme, dans l'état d'équilibre, une chaîne pesante et parfaitement flexible suspendue à deux points fixes.

Notre figure est donc, dans son état complet, celle qui serait engendrée par la révolution d'une chaînette ainsi placée par rapport à l'axe. Nous lui donnerons, d'après

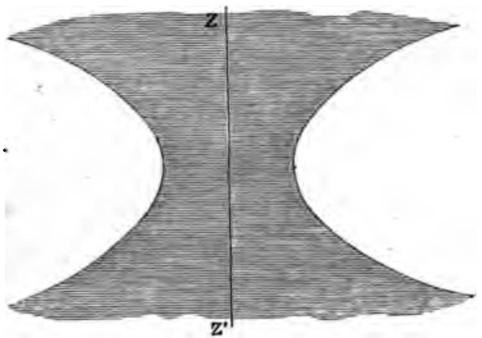


Fig. 31.

cela, le nom de *Caténoïde ;* la *fig.* 31 en représente une coupe méridienne assez étendue, dans laquelle l'axe de révolution est ZZ'.

La chaînette étant une courbe à branches infinies, le caténoïde s'étend donc encore à l'infini, comme le cylindre et l'onduloïde, mais non plus seulement dans le sens de l'axe.

Il est à peine nécessaire de faire remarquer que si, dans notre caténoïde partiel réalisé, la surface courbe comprise entre les anneaux exerce la même pression que les bases planes, c'est que, dans cette surface courbe, la courbure moyenne, c'est-à-dire (§ 2) la moyenne entre toutes les courbures positives et négatives autour d'un même point, étant nulle, son influence sur la pression est également nulle, de sorte que cette pression demeure la même que s'il n'y avait aucune courbure. Nous avons déjà vu un cas analogue à la fin du § 31.

§ 57. En vertu du principe qui termine le § 2, on peut concevoir deux caténoïdes d'aspects différents, savoir celui de la *fig.* 31, dans lequel le liquide remplit l'espace que

la chaînette en tournant laisse entre elle et l'axe, et un autre dans lequel le liquide occupe l'espace embrassé par

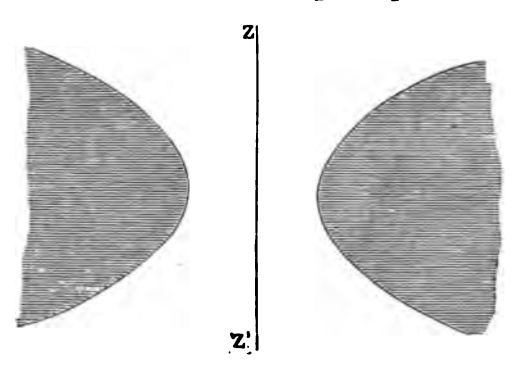


Fig. 32.

la courbe. La *fig.* 32 représente une coupe méridienne de ce dernier.

§ 58. Dans l'expérience du § 56, on n'arrive, comme nous l'avons dit, à rendre planes les bases de la figure, que lorsque l'écartement des anneaux n'excède pas les $\frac{2}{3}$ environ de leur diamètre. Nous reviendrons (§ 62) sur cette expérience; mais nous insisterons dès à présent sur une conséquence importante qui s'en déduit immédiatement : on doit en conclure, en effet, que, pour des anneaux d'un diamètre donné, il y a un maximum d'écartement au-delà duquel aucune portion de caténoïde n'est plus possible entre eux. Nous allons montrer que ce résultat est d'accord avec la théorie, et nous serons conduit en même temps à un nouveau résultat.

On a vu que la chaînette génératrice doit satisfaire à cette condition, que le rayon de courbure de son sommet soit égal et opposé à la droite qui mesure la distance de ce sommet à l'axe de révolution. Cela étant, concevons, dans un plan méridien, une droite perpendiculaire à l'axe

de révolution, et représentant l'axe de symétrie des chaînettes, puis une seconde droite parallèle à l'axe de révolution et distante de celui-ci d'une quantité égale au rayon des anneaux. Dans les divers écartements de ces derniers, leurs centres demeureront sur l'axe de révolution, et leurs contours s'appuieront toujours sur la seconde droite ci-dessus, que, pour abréger, nous appellerons la droite des anneaux. Imaginons enfin, dans le même plan, une chaînette génératrice ayant son sommet au point où la droite des anneaux est coupée par l'axe de symétrie dont nous avons parlé. Cette chaînette sera tangente en ce point à la droite en question, et ne pourra conséquemment s'appuyer sur les anneaux que lorsque les contours de ceux-ci passeront par le point de tangence, ou, en d'autres termes, lorsque la distance mutuelle des deux anneaux sera nulle[1]; la chaînette dont il s'agit correspond donc au cas d'un écartement nul des anneaux. Maintenant supposons que la courbe quitte cette position et marche graduellement vers l'axe de révolution, en se modifiant de manière à satisfaire toujours à la condition d'égalité entre le rayon de courbure de son sommet et la distance de ce sommet à l'axe; dans chacune de ses nouvelles positions, elle coupera la droite des anneaux en deux points, que nous désignerons par A et B. La distance de ceux-ci représentera donc, dans chacune de ces mêmes positions, l'écartement des anneaux, et la chaînette correspondante représentera la ligne méridienne d'un caténoïde dont les anneaux comprendraient une portion entre eux. Cela posé, examinons quelle est la marche des points A et B.

(1) Nous regardons ici, pour simplifier, les anneaux comme formés de fils sans épaisseur.

Dans la position initiale de la chaînette, c'est-à-dire lorsque son sommet est tangent à la droite des anneaux, les points A et B sont confondus au point de tangence; puis, lorsque le sommet de la courbe commence à marcher vers l'axe de révolution, ces deux points se séparent et s'éloignent progressivement l'un de l'autre. Or je dis que leur distance mutuelle atteindra un maximum, après lequel elle ira, au contraire, en décroissant. En effet, d'après la condition à laquelle la chaînette est astreinte, quand son sommet sera arrivé très-près de l'axe de révolution, le rayon de courbure de ce sommet sera devenu très-petit, d'où il suit que les deux branches de la courbe seront très-rapprochées, et que, par conséquent, les deux points A et B seront aussi très-voisins l'un de l'autre; enfin quand le sommet sera sur l'axe, ces mêmes points seront de nouveau réunis en un seul, puisque alors le rayon de courbure du sommet sera nul, et qu'ainsi les deux branches de la courbe ne feront plus qu'une seule ligne droite confondue avec l'axe de symétrie. Les points A et B qui, partant de la coïncidence, vont d'abord en s'écartant, se rapprochent donc ensuite, jusqu'à coïncider enfin une seconde fois; d'où il suit nécessairement que la distance mutuelle de ces deux points atteint un maximum; en outre, on voit aisément, d'après la nature de la courbe, que ce maximum doit être fini, et même ne peut être considérable relativement au diamètre des anneaux.

Il est évident que, dans son trajet jusqu'à l'axe de révolution, la courbe a passé par tous les cas qui, avec les anneaux donnés, peuvent convenir à l'équilibre; le maximum ci-dessus constitue donc une limite d'écartement des anneaux, au delà de laquelle il n'y a plus de caténoïde possible entre eux.

Mais ce qui précède nous fournit une autre conséquence également remarquable. Puisque, pendant le trajet du sommet de la chaînette, les points A et B s'éloignent d'abord l'un de l'autre pour se rapprocher ensuite, ils repassent nécessairement par les mêmes distances, de sorte que, pour chaque distance inférieure à la limite, ils appartiennent à la fois à deux chaînettes; or il résulte de là qu'à tout écartement des anneaux moindre que l'écartement maximum, correspondent toujours deux caténoïdes distincts s'appuyant sur ces anneaux, mais pénétrant inégalement entre eux. On voit sans peine que les sommets des deux chaînettes génératrices, sommets qui, pour un écartement nul, sont l'un au contour commun des anneaux en contact, l'autre sur l'axe de révolution, se rapprochent de plus en plus à mesure que l'écartement augmente, et coïncident enfin, ainsi que les deux courbes tout entières, quand cet écartement atteint son maximum. Les deux caténoïdes différeront donc d'autant moins que l'écartement des anneaux sera plus grand, et n'en feront plus qu'un à la limite.

§ 59. Toutes les chaînettes sont, comme on sait, semblables entre elles ; or si l'on conçoit une suite de caténoïdes complets engendrés par des chaînettes de différentes dimensions, toutes ces chaînettes seront aussi, d'après la condition à laquelle elles doivent satisfaire (§ 56), semblablement placées par rapport à l'axe de révolution, et conséquemment tous les caténoïdes seront des figures semblables.

Le caténoïde complet n'est donc pas susceptible de variations de forme comme l'onduloïde, mais constitue une figure unique, comme la sphère et le cylindre.

Ainsi les deux caténoïdes complets qui, théoriquement, s'appuient sur les mêmes anneaux, quand l'écartement

de ceux-ci est au-dessous de la limite, ne diffèrent l'un de l'autre que par leurs dimensions homologues absolues.

§ 60. Des deux caténoïdes partiels appartenant à ces deux caténoïdes complets et également possibles, d'après la théorie, entre les anneaux, notre procédé donne nécessairement le moins rentré; et si l'on essaie ensuite d'arriver au plus rentré en enlevant de nouvelles quantités d'huile à la masse, c'est toujours, comme nous le verrons bientôt, une autre figure d'équilibre qui se produit; or, de l'impossibilité de réaliser ce caténoïde partiel le plus rentré, on peut légitimement conclure qu'il constituerait une figure d'équilibre instable.

Quant au moins rentré, il forme évidemment une portion d'autant plus étendue du caténoïde complet que l'écartement des anneaux est plus près du maximum; car, à mesure que les anneaux sont plus écartés, l'arc de la chaînette qu'ils interceptent entre eux est (§ 58) une portion plus considérable de la courbe. Pour avoir un caténoïde partiel plus étendu par rapport au caténoïde complet, il faudrait que la chaînette pénétrât plus avant entre les anneaux ; mais dès lors, de quelque petite quantité que le sommet de la courbe avançât, l'écartement des anneaux diminuerait (*ibid.*), il y aurait une autre chaînette possible, moins rentrée, et s'appuyant sur les mêmes anneaux, et le caténoïde partiel engendré par la première étant le plus rentré, il serait instable. Le caténoïde de plus grande hauteur constitue donc la portion la plus étendue du caténoïde complet que l'on puisse réaliser entre deux anneaux égaux.

Signalons ici une autre conséquence à laquelle ce qui précède semble conduire, et qui serait en opposition avec les faits : pour tout écartement inférieur au maximum, le caténoïde le moins rentré se montre toujours parfai-

tement stable, et, ainsi qu'on l'a vu ci-dessus, le plus rentré doit être regardé comme étant toujours instable ; or le caténoïde de plus grande hauteur forme, on vient aussi de le voir, le passage entre les caténoïdes de la première catégorie et ceux de la seconde, et, par suite, entre les caténoïdes stables et les caténoïdes instables ; on peut donc se croire en droit d'admettre que le caténoïde de plus grande hauteur est à la limite de la stabilité de ce genre de figure ; et cependant, quand on le réalise avec une masse d'huile (§ 62), il manifeste une stabilité très-décidée. Nous saurons, dans le chapitre où nous traiterons les questions de stabilité, à quoi tient cette apparente contradiction.

§ 61. — Il est aisé de voir que la troisième limite des variations de l'onduloïde, limite dont nous avons parlé au § 51, n'est autre chose que le caténoïde. En effet, en faisant varier l'onduloïde partiel de la manière indiquée dans ce même paragraphe, il est clair qu'à mesure que l'on augmente le volume de la masse, la normale et le rayon de courbure relatifs au sommet de l'arc méridien convexe vont en croissant, et deviennent infinis en même temps que ce volume ; d'où il suit qu'à cette limite la quantité $\frac{1}{M}+\frac{1}{N}$ est nulle, ce que nous savons être le caractère du caténoïde.

La quantité $\frac{1}{M}+\frac{1}{N}$ convergeant ainsi vers zéro à mesure que l'onduloïde approche du caténoïde, la pression exercée par la couche superficielle converge en même temps vers celle d'une surface plane ; si donc l'on conçoit, entre deux anneaux, un étranglement appartenant à un onduloïde, et si l'on imagine que cet onduloïde marche par degrés vers le caténoïde, les bases de la

figure, bases dont la pression doit toujours être égale à celle de l'étranglement, deviendront nécessairement de moins en moins convexes, et seront enfin tout à fait planes. Or c'est ce que réalise évidemment l'expérience du § 56 : lorsque, après avoir formé entre deux anneaux un cylindre dont la hauteur ne dépasse pas les $\frac{2}{3}$ du diamètre, on lui enlève graduellement du liquide et que les bases s'affaissent peu à peu jusqu'à perdre toute leur courbure, l'étranglement qui se produit et s'approfondit au fur et à mesure, appartient, on le comprend, à un onduloïde qui tend vers sa troisième limite, et l'expérience en question nous fait ainsi assister au passage progressif de l'onduloïde au caténoïde.

Si nous réunissons ce qui précède au contenudu § 55, nous pourrons légitimement en déduire cette conclusion : tout étranglement s'appuyant sur deux anneaux et présentant des bases convexes est un étranglement d'onduloïde, que la courbure des bases soit supérieure, égale ou inférieure à celle des bases du cylindre qui serait compris entre les mêmes anneaux.

§ 62. J'ai cherché à déterminer expérimentalement, au moins d'une manière approchée, le rapport maximum entre la hauteur et le diamètre des bases. Le diamètre extérieur des anneaux employés était de 71 millimètres. Dans chacun des essais, on a commencé par former un cylindre entre ces anneaux, puis on a enlevé de l'huile à la masse par seringues pleines d'abord, et ensuite par petites portions ; on interrompait de temps à autre l'opération pour observer la figure. On a trouvé, de cette manière, que le plus grand écartement des anneaux pour lequel on pût obtenir une figure à bases planes,

était de 47 millimètres, c'est-à-dire sensiblement les $\frac{2}{3}$ de 71. Nous pouvons conclure delà que la hauteur maxima du caténoïde partiel est, soit exactement, soit à fort peu près, les $\frac{2}{3}$ du diamètre des bases. Ce caténoïde est représenté *fig.* 33.

Ces expériences ont présenté des particularités curieuses, dont la description trouvera sa place dans le chapitre IX.



Fig. 33.

Nous terminons ici l'étude de l'onduloïde et du caténoïde, et nous allons passer à celle d'une autre figure encore.

§ 63. Cette autre figure, nous en avons déjà entrevu une portion : c'est l'étranglement à bases concaves dont nous avons parlé au § 56, étranglement qui, par la nature de ces bases, est étranger à l'onduloïde et au caténoïde. Pour le réaliser, il faut, comme nous l'avons dit, que la distance des anneaux soit inférieure aux $\frac{2}{3}$ du diamètre; la *fig.* 34 représente, en coupe méridienne, un semblable étranglement, pour une distance des anneaux égale au tiers environ du diamètre, et lorsque les bases se sont déjà fortement creusées; les lignes ponctuées sont les coupes des plans des anneaux. Essayons maintenant, ainsi que nous l'avons fait à l'égard des deux figures précédentes, de déterminer la forme complète de la ligne méridienne.

Fig. 34.

Présentons d'abord quelques remarques. En premier lieu, supposons que le rapport entre la distance et le diamètre des anneaux soit suffisamment au-dessous de $\frac{2}{3}$ pour permettre d'extraire une grande quantité de

liquide sans qu'on puisse craindre d'occasionner la désunion. Dans ce cas, l'étranglement et les bases se creusant à la fois de plus en plus, on comprend qu'il doit arriver un instant après lequel leurs surfaces ne pourraient plus coexister sans se couper mutuellement. On saura, dans le chapitre VI, ce qui se passe alors; mais on voit, dès à présent, que si l'on veut observer l'étranglement dans toutes les phases où il appartient à la nouvelle figure d'équilibre, on doit mettre obstacle au creusement des bases, et c'est à quoi l'on parvient sans peine en substituant des disques aux anneaux; on peut alors enlever de l'huile jusqu'à ce que la figure se désunisse spontanément au milieu de sa hauteur. Les disques que j'ai employés ont, comme les anneaux, 70 millimètres de diamètre; l'inférieur est porté sur trois pieds plus solides que ceux des anneaux, et partant de points situés entre le bord et le centre; le supérieur est soutenu par un fil de fer suffisamment épais fixé normalement à son centre.

En second lieu, l'étranglement, qu'il soit creusé entre des anneaux ou poussé plus loin entre des disques, se montre toujours parfaitement symétrique de part et d'autre de son cercle de gorge. C'est d'ailleurs ce que veut la théorie, car le mode de raisonnement du § 48 est indépendant de la nature de la ligne méridienne, et s'applique ainsi à l'étranglement dont nous nous occupons aussi bien qu'à un étranglement d'onduloïde. Si donc, dans un plan méridien, on conçoit une droite perpendiculaire à l'axe de révolution et passant par le centre du cercle de gorge, tout ce que la ligne méridienne complète offrira d'un côté de cette droite, elle l'offrira aussi, d'une manière exactement symétrique, de l'autre côté, en sorte que cette même droite constituera un axe de symétrie.

En troisième lieu, puisque, en employant des anneaux, les bases de la figure partielle sont des calottes sphériques concaves et ont conséquemment une courbure moyenne négative, il doit en être de même de la surface de l'étranglement, et, par suite, de celle de tout le reste de la figure complète ; ainsi, dans cette figure complète, la quantité $\frac{1}{M}+\frac{1}{N}$ est partout négative.

§ 64. Ces préliminaires posés, je dis que les points *a* et *b* (*fig*, 34) où s'arrête la ligne méridienne partielle, ne peuvent, dans la ligne méridienne complète, être des points d'inflexion.

On voit, en effet, d'après la direction de la tangente en ces points, que si la ligne méridienne prenait à partir de là une courbure de sens contraire (*fig.* 35), le rayon de courbure serait, dans cette partie de la figure, dirigé à l'intérieur du liquide comme la normale, et qu'ainsi la quantité $\frac{1}{M}+\frac{1}{N}$ deviendrait positive.

Fig 35.

Au delà des points *a* et *b*, la ligne méridienne commence donc par garder une courbure concave ; et le même sens de courbure se maintient évidemment pour la même raison, tant que la courbe va en s'éloignant à la fois de l'axe de révolution et de l'axe de symétrie. Mais la courbe ne peut continuer indéfiniment à s'éloigner de ces deux axes : en effet, si telle était sa marche, il est clair que la courbure devrait diminuer de manière à s'annuler, dans chacune des deux branches, au point situé à l'infini, en sorte qu'en ce point le rayon de courbure aurait une valeur infinie ; et comme il en serait évidemment de

même de la normale, la quantité $\frac{1}{M}+\frac{1}{N}$ deviendrait nulle à cette limite.

Il faut donc de toute nécessité qu'à une distance finie de son sommet, la courbe ait deux points dans lesquels ses éléments soient parallèles à l'axe de symétrie, et c'est ce que l'expérience confirme, ainsi que nous allons le voir.

§ 65. Si l'on emploie des disques, qu'on les place à une distance égale au tiers environ de leur diamètre, et que l'on pousse suffisamment loin l'absorption du liquide, l'angle compris entre les derniers éléments de la surface de la masse et le plan de chacun des disques diminue jusqu'à s'annuler complétement, de manière que cette surface est alors tangente aux plans des disques (*fig.* 36), et qu'ainsi les derniers éléments de la ligne méridienne sont parallèles à l'axe de symétrie. Il est fort difficile de juger du point précis où ce résultat est atteint; mais on s'assure qu'il se produit réellement, en continuant à enlever du liquide : on ne tarde pas, en effet, à voir les circonférences qui terminent la surface de la masse abandonner les bords des disques, se retirer, en diminuant de diamètre, à une certaine distance en dedans de ces bords, et laisser libre une petite zone de chacun des plans solides; or, comme ces zones demeurent nécessairement mouillées d'huile, bien qu'en couche excessivement mince, il est clair que la surface de la masse doit y aboutir tangentiellement.

Fig. 36.

Si l'écartement des disques est moindre encore, on obtient un résultat de même nature; seulement on peut, avant qu'il y ait désunion spontanée au milieu de la figure, rétrécir davantage

Fig. 37.

les circonférences de contact, ou, en d'autres termes, augmenter la largeur des zones libres (*fig.* 37).

§ 66. La raison donnée dans le § 64 pour établir l'absence d'une inversion de courbure tant que la courbe s'éloigne à la fois de l'axe de révolution et de l'axe de symétrie, subsiste évidemment encore aux points que nous venons de considérer, c'est-à-dire à ceux où les éléments sont parallèles à ce dernier axe ; d'où il résulte que la courbe se rapproche ensuite de celui-ci, en conservant le même sens de courbure, comme le montre la *fig.* 38, où la courbe est dessinée sur une plus grande échelle que la portion comprise dans la *fig.* 36, et où l'axe de symétrie est représenté par la droite XX'.

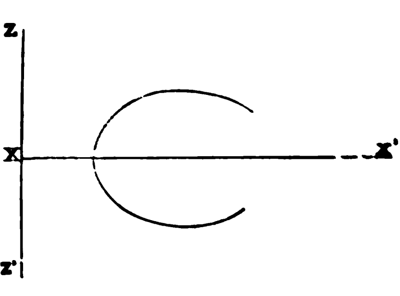


Fig 38.

Et tant que ces prolongements de la courbe continuent à s'éloigner de l'axe de révolution, le sens de la courbure doit encore demeurer le même. Supposons, en effet, qu'il change, en f et en g par exemple (*fig.* 39) ; alors, du point f à un point tel que m situé un peu au delà, le rayon de courbure et la normale auraient, on le voit, des directions opposées, en sorte que la quantité $\frac{1}{M}+\frac{1}{N}$ serait une différence ; or, de f en m, la normale irait évidemment en croissant, puisque, d'une part, la distance

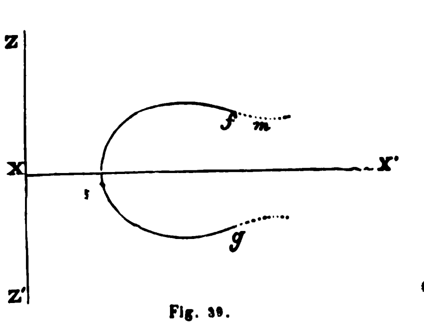


Fig. 39.

à l'axe de révolution augmente, et que, d'autre part, cette normale aurait une obliquité de plus en plus grande ; il faudrait donc, pour que la différence ci-dessus demeurât constante, que le rayon de courbure allât aussi en croissant de *f* en *m ;* mais c'est précisément le contraire qui aurait lieu ; car, à cause de l'inflexion, le rayon de courbure serait infini en *f*, et conséquemment ne pourrait que diminuer à partir de là. Il est inutile de faire remarquer que ce que nous venons de dire s'applique également au point *g*.

Voyons maintenant si, avant d'atteindre l'axe de symétrie, la courbe peut présenter deux points tels que *h* et *k* (*fig.* 40) où ses éléments soient perpendiculaires à cet axe. Pour cela, examinons à quelles conditions doit satisfaire la courbure depuis le sommet *s* jusqu'aux points *h* et *k*, et il suffira de considérer l'arc *snh*. Soit *n* le point où l'élément de la courbe est parallèle à l'axe de symétrie. De *s* en *n*, le rayon de courbure et la normale ont évidemment des directions contraires, et la quantité $\frac{1}{M}+\frac{1}{N}$ constitue une différence ; donc, d'un point à un autre de cet arc, les quantités M et N doivent varier dans le même sens ; et comme la normale va en augmentant du point *s* au point *n*, le rayon de courbure doit aller de même en augmentant ; d'où il suit que, de *s* en *n*, la courbure va en décroissant. Plus loin, c'est-à-dire de *n* en *h*, on voit que le rayon de courbure et la normale sont dirigés du même côté, de

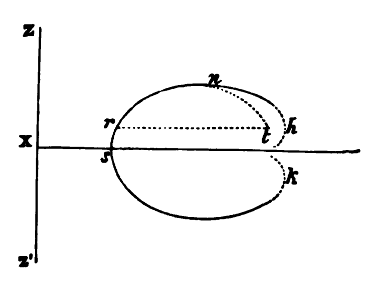


Fig. 40.

manière que les deux termes de la quantité $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$ sont de même signe, et qu'ainsi, d'un point à un autre, les quantités M et N doivent varier en sens opposé : or, dès qu'on s'écarte de n sur l'arc nh, la normale commence par diminuer, puisque, au point n, elle est infinie ; donc le rayon de courbure commence par augmenter, ou, en d'autres termes, la courbure va d'abord en diminuant, et, quelle que soit sa marche ultérieure, elle sera toujours, en tous les points de l'arc nh, plus faible qu'en n, puisque en tous ces points la normale est finie, et, par suite, moindre qu'en n. Mais nous savons que la courbure va en croissant de n en s; donc, dans toute l'étendue de l'arc nh, la courbure est moindre qu'en aucun point de l'arc ns.

Cela posé, menons la droite hr parallèle à l'axe de symétrie, puis construisons, à partir du point n, un arc nt exactement symétrique à l'arc nr. Dans toute la longueur de l'arc nh la courbure sera, en vertu de ce qui précède, moindre qu'en aucun des points de l'arc nt; d'où il suit que ce dernier arc sera entièrement intérieur au premier ; or l'arc nt aboutit en t à la droite hr par un élément qui fait nécessairement, avec la partie tr de cette droite, un angle aigu ; donc, pour que l'arc nh, qui part de n dans la même direction que l'arc nt, aboutît normalement, en h, à la droite hr, il faudrait qu'après s'être éloigné de l'arc nt, il allât ensuite en s'en rapprochant, ce qui est évidemment impossible par suite de l'infériorité de la courbure en tous ses points; on voit même qu'il doit couper la droite hr sous un angle plus aigu que ne le fait l'arc nt.

Ainsi la courbe, en s'abaissant, à partir de n, vers l'axe de symétrie, ne peut cesser de s'éloigner de l'axe

de révolution ; et puisqu'elle ne peut d'ailleurs changer le sens de sa courbure, il faut nécessairement qu'elle aille couper l'axe de symétrie ; enfin on comprend que, par suite encore de la condition qui régit ses courbures, elle doit couper cet axe obliquement, en sorte que nous arrivons à cette conclusion, qu'elle forme un nœud (*fig.* 41).

Nous allons vérifier l'existence de ce nœud à l'aide de l'expérience ; si nous n'avons point commencé par là, c'est qu'il fallait d'abord démontrer qu'en partant d'un étranglement pour lequel la courbure moyenne est négative, il n'y a pas d'autre forme possible de la ligne méridienne.

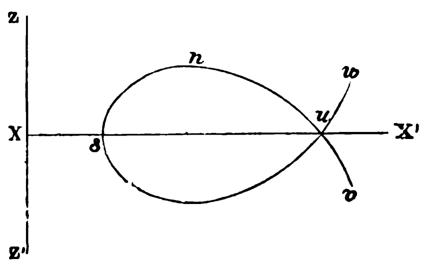


Fig. 41.

§ 67. Les étranglements réalisés dans les expériences du § 65 étant engendrés par une portion du nœud de la ligne méridienne complète, il est visible que la figure engendrée par le nœud tout entier, depuis le sommet de celui-ci jusqu'à sa pointe, serait en creux dans l'intérieur de l'huile ; mais, comme nous le savons (§ 2), il est indifférent, pour l'équilibre, que le liquide soit situé d'un côté ou de l'autre de la surface ; on peut donc également bien supposer pleine et en relief la figure engendrée par le nœud, et c'est dans ce dernier état que notre expérience va la réaliser. Seulement lorsque le liquide est transporté de ce côté de la courbe, les quantités M et N changent à la fois de signe, et conséquemment la quantité $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$, de négative qu'elle était, devient positive.

On forme, dans un anneau en fil de fer, une lentille liquide bi-convexe (§ 19), dont l'épaisseur soit à peu près égale au sixième du diamètre : par exemple, avec un anneau de 70 millimètres de diamètre, l'épaisseur de la lentille doit être d'environ 12 millimètres. Si l'on perce normalement cette lentille en son milieu par un moyen que nous indiquerons plus bas, on obtient une figure annulaire régulière, limitée extérieurement par l'anneau solide, et qui persiste pendant deux ou trois secondes, après quoi l'on voit l'ouverture centrale marcher vers un point de l'anneau solide, puis la masse se désunir en ce point, et tout le liquide refluer vers la partie opposée de l'anneau, pour y former une grosse masse sensiblement sphérique. Or la figure annulaire momentanée qui se forme dans ces circonstances est, bien qu'instable, une figure d'équilibre, puisqu'elle se maintient pendant quelques instants, et sa durée est assez grande pour que l'on puisse constater que sa coupe méridienne a la forme représentée par la *fig.* 42, dans laquelle la ligne ponctuée est la coupe du plan de l'anneau. Cette coupe méridienne montre évidemment que la surface de la figure produite est engendrée par un nœud ayant son sommet tourné vers l'axe de révolution et sa pointe à l'anneau solide.

Fig. 42.

Arrêtons-nous quelque peu sur les détails de l'expérience que nous venons de décrire, et sur certaines modifications de cette même expérience. Pour percer la lentille, il faut employer un petit cylindre de bois terminé en pointe à l'une de ses extrémités, et fixé, par son autre extrémité, à un fil de fer que l'on recourbe obliquement de manière qu'en le tenant à la main, on puisse introduire le petit cylindre dans le vase, et percer

normalement la lentille. Si le diamètre de l'anneau solide est, comme nous l'avons supposé plus haut, de 70 millimètres, celui du petit cylindre doit être d'environ 16 millimètres; le cylindre et sa pointe doivent être recouverts d'étoffe de coton, afin d'empêcher toute adhérence de l'huile.

Si l'on donne à la lentille une épaisseur qui surpasse notablement le sixième du diamètre de l'anneau solide, le liquide revient sur lui-même aussitôt qu'on retire le petit cylindre, et la masse reprend sa forme lenticulaire; mais on peut rendre l'épaisseur moindre que la limite ci-dessus; alors l'ouverture centrale prend des dimensions plus grandes, et, par conséquent, le nœud de la ligne méridienne est plus petit.

Lorsque l'épaisseur de la lentille est suffisamment inférieure à la limite en question, le mode de destruction spontanée de la figure instable n'est plus le même : l'ouverture centrale ne marche plus alors vers un point de l'anneau solide, mais la masse liquide annulaire s'étrangle et se désunit en plusieurs endroits à la fois, de sorte qu'elle se convertit en une série de petites masses isolées qui demeurent adhérentes à différentes parties de l'anneau métallique. Nous reviendrons plus tard sur ce dernier phénomène.

§ 68. L'anneau liquide pouvant ainsi prendre, dans un même anneau solide, des dimensions très-différentes suivant l'épaisseur de la lentille, ou, en d'autres termes, suivant le volume du liquide dont il est formé, il en résulte que, pour une même distance de la pointe du nœud de la ligne méridienne à l'axe de révolution, la longueur du nœud peut varier entre des limites étendues : dans les expériences ci-dessus décrites, ces variations se montrent comprises entre une petite fraction de

la distance dont il s'agit et les $\frac{3}{4}$ à peu près de cette même distance. La figure complète dont nous nous occupons n'est donc pas toujours semblable à elle-même comme la sphère, le cylindre ou le caténoïde; elle est, comme l'onduloïde, susceptible de variations de forme. La comparaison des figures liquides représentées *fig.* 36 et 37 conduit à la même conclusion.

§ 69. Avant d'aller plus loin, signalons une particularité remarquable. Si l'on suppose le nœud en relief, le liquide qui l'occupe se trouve dans la concavité de la courbe, et il doit évidemment se trouver encore du même côté de cette courbe au-delà du point *u* (*fig.* 41); il remplit donc les espaces compris entre les prolongements *uv*, *uw* et le nœud, en sorte que ce nœud est engagé, soit complétement, soit partiellement, dans l'intérieur de la masse. Si l'on suppose le nœud en creux, on voit sans peine que ce sont alors les prolongements *uv* et *uw* qui sont engagés dans le liquide.

De là résulte cette conséquence singulière, que, bien que la condition générale de l'équilibre soit satisfaite, on ne peut se représenter la figure complète qu'à l'état de simple surface, et non à celui de masse liquide. Dans ce dernier état, il n'est possible de concevoir que des portions isolées de la figure, telles, par exemple, que la portion engendrée par le nœud seul.

§ 70. Tâchons actuellement de découvrir la marche de la courbe au delà des points *v* et *w* (*fig.* 41). Nous savons déjà, par les raisons exposées dans le § 66, et auxquelles se rapporte la *fig.* 39, que tant que les branches de la courbe continuent à s'éloigner de l'axe de révolution, la courbure ne peut changer de sens, et conséquemment demeure concave vers cet axe.

Cela étant, il n'y a évidemment que trois hypothèses possibles : ou bien les branches en question s'éloignent de l'axe de révolution de manière que leur distance à ce dernier converge vers l'infini ; ou bien elles tendent vers une asymptote parallèle à cet axe ; ou bien chacune d'elles présente, à une distance finie de la pointe *u* du nœud, un point où l'élément est parallèle à ce même axe.

Nous devons exclure immédiatement la première de ces hypothèses : elle exigerait, comme nous l'avons déjà fait remarquer (§ 64), qu'aux points situés à l'infini sur les deux branches, le rayon de courbure et la normale fussent l'un et l'autre infinis, et qu'ainsi la quantité $\frac{1}{M}+\frac{1}{N}$ fût égale à zéro.

Examinons donc la seconde hypothèse, savoir celle d'une asymptote parallèle à l'axe de révolution. Au point *n* (*fig.* 41), la normale est infinie et le rayon de courbure fini ; au point où la branche *nuv* prolongée atteindrait l'asymptote, au contraire, le rayon de courbure serait infini, et la normale, qui mesurerait la distance de ce point à l'axe, serait finie. Donc, en allant du point *n* à ce point extrême, la normale, d'abord supérieure en longueur au rayon de courbure, lui deviendrait ensuite inférieure ; d'où il suit qu'il y aurait sur la courbe un point où la normale et le rayon de courbure

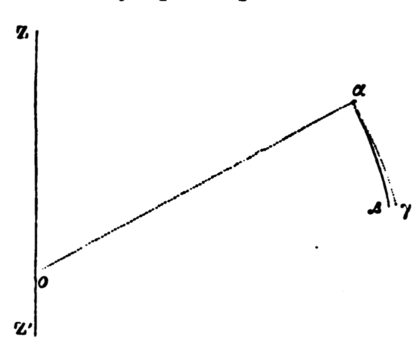


Fig. 43.

seraient égaux, et pour lequel, par conséquent, le centre de courbure serait sur l'axe de révolution. Soient α ce point (*fig.* 43), o le centre de courbure correspondant, et $\alpha\beta$ un petit arc de cercle décrit du point o comme centre. Notre branche de courbe quitterait le point α suivant la même direction et avec la même courbure que l'arc $\alpha\beta$, puis se séparerait immédiatement de celui-ci. Or supposons qu'à partir de α la courbure aille d'abord en décroissant ; la courbe commencera nécessairement par être extérieure à l'arc de cercle. Soit $\alpha\gamma$ un petit arc de cette courbe, dans toute l'étendue duquel la courbure décroisse, et soit la longueur de l'arc $\alpha\beta$ prise égale à celle de l'arc $\alpha\gamma$. Le point γ sera plus éloigné de l'axe que le point β, et, en outre, à cause de l'infériorité des courbures, la tangente en γ fera avec ce même axe un angle plus grand que la tangente en β ; la normale au point γ sera donc, par cette double raison, plus longue que la normale au point β. D'un autre côté, par suite encore de l'infériorité des courbures, le rayon de courbure au point γ sera également plus long que le rayon de courbure au point β; mais, en ce dernier point, ces deux quantités ont la même valeur qu'au point α; donc, en passant de α en γ, le rayon de courbure et la normale augmenteront l'un et l'autre. Or cela est incompatible avec l'équation de l'équilibre ; en effet, la courbe, dans toute la partie que nous étudions, tournant sa concavité vers l'axe, le rayon de courbure et la normale sont partout de même signe, et conséquemment lorsque l'un augmente, l'autre doit diminuer, et vice versâ. Si l'on suppose qu'à partir de α la courbure aille en croissant, l'arc de courbe sera intérieur à l'arc de cercle, et le même mode de raisonnement ferait voir que, d'une extrémité à l'autre du premier, le rayon de cour-

bure et la normale diminueront tous deux. L'hypothèse d'une asymptote parallèle à l'axe de révolution conduisant ainsi à un résultat impossible, on voit qu'elle doit être rejetée comme la première.

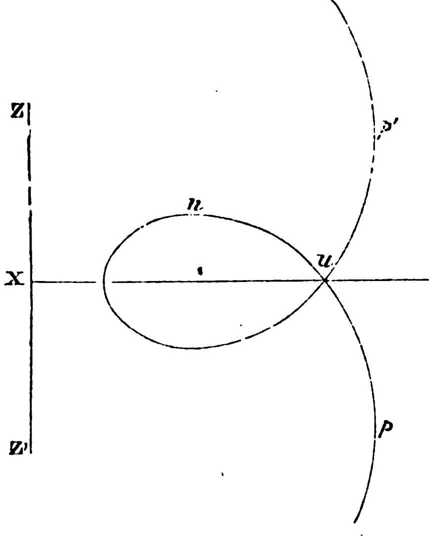


Fig. 44.

C'est donc la 3me hypothèse qui est vraie ; c'est-à-dire que la courbe présente deux points p et p' (*fig.* 44), où la tangente est parallèle à l'axe de révolution.

§ 71. L'expérience confirme pleinement cette déduction de la théorie, et elle fournit en outre une donnée qui nous dévoilera la marche ultérieure de la courbe.

Les deux disques étant placés à une distance quelconque l'un de l'autre, à une distance égale à leur diamètre, par exemple, on forme entre eux un cylindre, et l'on abaisse ensuite graduellement le disque supérieur : la figure, nous le savons, passe alors à l'onduloïde, et elle se bombe de plus en plus, jusqu'à ce qu'elle constitue une portion de sphère (*fig.* 45). Mais si l'on continue à abaisser le disque supérieur, la convexité méridienne augmente encore, et dépasse conséquemment le point ci-dessus ; on obtient ainsi, par exemple, pour un certain rapprochement des disques,


Fig. 45.

le résultat représenté (*fig* 46), et la figure liquide est toujours parfaitement stable. Or, en cet état, elle ne peut plus faire partie de l'onduloïde, puisque l'on a dépassé la sphère, qui est (§ 50) l'une des limites des variations de ce dernier. Enfin on peut descendre le disque supérieur jusqu'à ce qu'aux points où la ligne méridienne aboutit aux bords des disques, les tangentes soient près d'être perpendiculaires à l'axe de révolution, comme on le voit dans la *fig*. 47, et, pour une masse d'huile moindre, dans la *fig*. 48; mais, vers ce degré de rapprochement des disques, la figure liquide perd sa stabilité : si l'on abaisse un peu trop le disque supérieur, on voit l'huile se porter en plus grande masse d'un côté de l'axe du système, en sorte que la figure cesse d'être de révolution, puis, de ce même côté, l'huile franchit les bords des disques, et s'étend en partie sur les faces extérieures de ceux-ci.



Fig. 46.

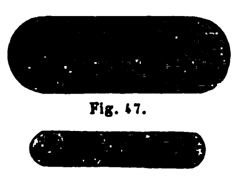


Fig. 47.

Fig. 48.

Maintenant, en vertu de ce qui a été exposé dans le paragraphe précédent; tant que la courbe, à partir de *n* (*fig*. 44), va en s'éloignant de l'axe de révolution, le rayon de courbure ne peut devenir égal à la normale; et, puisqu'il lui est inférieur en *n*, il doit lui demeurer inférieur tant que l'on n'atteint pas le point *p;* donc, dans toute l'étendue de l'arc *nup*, sauf au point *n* même et peut-être au point *p*, auquel la démonstration ne s'étend pas, le centre de courbure est toujours situé entre la courbe et l'axe, et conséquemment la courbure est toujours plus forte que celle d'une circonférence de cercle qui aurait son centre sur l'axe. Or, comme nous venons de le voir, dans les figures liquides partielles représentées *fig*. 46,

47 et 48, les courbures méridiennes sont plus fortes que lorsque la figure est une portion de sphère, ou, en d'autres termes, elles sont plus fortes que celle d'une circonférence de cercle passant par les bords des disques et ayant son centre sur l'axe. Il est clair, d'après cela, que ces mêmes figures partielles réalisent des portions de la figure complète engendrées par un arc de la ligne méridienne s'étendant de part et d'autre du point p (*fig.* 44); seulement elles se rapportent évidemment à des cas différents de cette figure complète, que nous savons être susceptible de variations comme l'onduloïde.

§ 72. Faisons un dernier pas dans la poursuite de notre ligne méridienne. Dans les expériences ci-dessus, lorsque les densités des deux liquides sont rendues bien égales, la figure d'huile se montre toujours parfaitement symétrique par rapport à son cercle équatorial. A la vérité, c'est l'œil qui en juge ainsi, et l'on pourrait penser que cette symétrie n'est peut-être qu'approchée; mais nous allons faire voir qu'elle est rigoureuse. En l'absence de toute cause accidentelle d'irrégularité, il n'y aurait évidemment aucune raison pour qu'un excès de courbure existât plutôt d'un côté déterminé de l'équateur que de l'autre, puisque les deux disques sont égaux et parallèles; d'où résulte qu'il y a nécessairement une forme d'équilibre où la symétrie est exacte. Seulement si, dans nos figures partielles réalisées, figures qui sont stables, la symétrie n'était qu'approchée, il faudrait admettre que la forme d'équilibre exactement symétrique dont nous venons de parler, serait instable. Si donc toutes les figures liquides que l'on peut obtenir dans les expériences décrites plus haut, c'est-à-dire celles que donnent tous les degrés d'abaissement du disque depuis le cas de la *fig.* 45 jusqu'à celui de la *fig.* 47 et toutes les masses plus grandes et

plus petites avec les mêmes disques, si, dis-je, toutes ces figures n'étaient symétriques qu'en apparence, à chacune d'elles correspondrait une autre figure d'équilibre extrêmement peu différente, et qui serait instable. Or l'existence de deux figures d'équilibre partielles extrêmement voisines, l'une stable et l'autre instable, peut bien se rencontrer dans un cas particulier des variations des deux figures complètes, ou, au moins, de l'une d'elles ; mais, on le comprend, il est impossible que la même chose se reproduise dans toute l'étendue des variations de la figure partielle réalisée. Concluons de là que, dans les figures liquides du paragraphe précédent, la symétrie est réelle, et qu'ainsi, dans notre ligne méridienne complète, il y a, outre l'axe de symétrie du nœud, un autre axe de symétrie également perpendiculaire à l'axe de révolution, et passant par le point *p* (*fig.* 44).

Mais dès lors tout ce que la courbe présente d'un côté de ce point, elle doit le présenter symétriquement de l'autre côté ; le nœud qui se trouve au-dessus de *p* doit donc avoir son correspondant au-dessous ; et puisque ces deux nœuds ont eux-mêmes respectivement leur axe de symétrie, il en résulte nécessairement, en premier lieu, qu'ils sont parfaitement identiques, et, en second lieu, que tout ce qu'il y a d'un côté de l'un d'eux doit se reproduire identiquement de l'autre côté ; d'où il suit enfin qu'au-dessus du nœud supérieur il y en a un autre pareil, puis au-dessus de celui-ci un autre encore, et ainsi de suite indéfiniment le long de l'axe de révolution, que la même chose a lieu au-dessous du nœud inférieur, et que tous ces nœuds sont reliés par des arcs également identiques entre eux. La *fig.* 49, dans laquelle l'axe de révolution AB est placé horizontalement, représente une portion étendue de la courbe.

La figure engendrée par cette courbe se prolonge donc indéfiniment dans le sens de l'axe, comme le cylindre et l'onduloïde; nous lui donnerons aussi un nom, nous l'appellerons le *Nodoïde*. Remarquons seulement que, cette figure étant, de même que l'onduloïde, susceptible de variations entre certaines limites, la *fig.* 49 ne doit être regardée que comme offrant un cas de sa ligne méridienne.

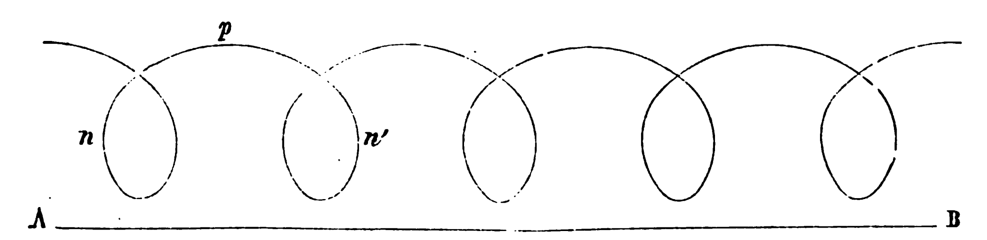


Fig. 49.

Rappelons ici l'observation que nous avons présentée dans le § 69, et que l'on comprendra mieux encore maintenant d'après l'aspect de la courbe, savoir que l'on ne peut se représenter la figure complète qu'à l'état de simple surface, parce qu'en la supposant pleine, elle aurait des parties engagées dans la masse.

§ 73. Avant d'étudier le nodoïde dans ses variations, nous devons résoudre une question que suggèrent les résultats des expériences du § 71. Maintenant que nous connaissons la forme de la ligne méridienne, nous voyons que ces expériences réalisent la portion du nodoïde engendrée par une partie plus ou moins grande de l'un des arcs convexes vers l'extérieur, tels que *npn'* (*fig.* 49); mais on peut se demander si cela n'exige pas qu'avec des disques d'un diamètre donné, le volume de l'huile demeure compris entre certaines limites, de sorte que, pour des volumes plus grands ou plus petits, la figure réalisée n'appartiendrait plus au nodoïde. Pour décider la chose,

partons de l'une de ces figures réalisées, poursuivons l'arc méridien au delà du point où il aboutit au bord de l'un des disques, du disque supérieur, par exemple, et voyons s'il est possible d'arriver à une courbe autre que la ligne méridienne d'un nodoïde.

Supposons d'abord que, dans la partie de son trajet où elle continue à se rapprocher de l'axe de révolution et à s'éloigner de l'axe de symétrie, la courbe présente un point d'inflexion, de manière qu'elle tourne ensuite sa convexité vers ces deux axes. Si, pendant qu'elle se rapproche encore du premier, elle changeait une deuxième fois le sens de sa courbure, la normale correspondante à ce second point d'inflexion serait nécessairement plus courte que la normale correspondante au premier, puisqu'elle aurait moins d'obliquité et partirait d'un point plus voisin de l'axe ; or cela est incompatible avec l'équation de l'équilibre : car cette équation se réduisant, en tous les points d'inflexion, à $\frac{1}{N} = C$, les deux normales ci-dessus devraient être égales.

L'existence de ce deuxième point d'inflexion étant donc impossible, on voit qu'au delà du premier, la courbe, qui ne peut (§ 37) atteindre l'axe de révolution, devrait nécessairement ou bien tendre vers une asymptote parallèle à cet axe, ou bien présenter, à une distance finie, un point où la tangente fût parallèle à ce même axe.

On comprend immédiatement que le premier de ces deux cas doit être rejeté : car, au point extrême où la courbe toucherait l'asymptote, le rayon de courbure serait infini, ce qui réduirait encore, en ce point, l'équation de l'équilibre à $\frac{1}{N} = C$, et la normale y serait aussi évidemment plus courte qu'au point d'inflexion.

Dans le second cas, le point où la tangente serait devenue parallèle à l'axe de révolution ne pourrait lui-même, toujours à cause de l'inégalité évidente des normales, être un deuxième point d'inflexion; il devrait donc constituer un minimum de distance à l'axe, et dès lors un petit arc s'étendant de part et d'autre de ce minimum engendrerait un étranglement, qui pourrait être réalisé entre deux anneaux ou deux disques égaux. Or nous avons discuté toutes les figures partielles possibles de cette nature ; nous avons vu que tout étranglement appartient soit à l'onduloïde, soit au caténoïde, soit à la partie du nodoïde qui environne le sommet d'un nœud ; mais nous savons que la figure partielle bombée d'où nous sommes parti, n'est point une portion d'onduloïde, puisque sa convexité dépasse la sphère ; il est visible, en second lieu, qu'elle n'est point une portion de caténoïde, et enfin l'on voit, d'après ce qui précède, que l'étranglement ci-dessus ne serait point une portion de nœud.

Ainsi notre hypothèse originaire, celle d'un point d'inflexion dans la partie de la courbe qui va en s'éloignant de l'axe de symétrie et en se rapprochant de l'axe de révolution, conduit inévitablement à des impossibilités, et conséquemment la courbe garde le même sens de courbure jusqu'à ce qu'elle sorte de ces conditions.

Mais, pour en sortir, il faut évidemment qu'elle cesse d'abord de s'éloigner de l'axe de symétrie, ou, en d'autres termes, qu'elle présente un point où la tangente soit parallèle à ce dernier axe. Et ce point n'est pas non plus un point d'inflexion, car la normale et le rayon de courbure y seraient tous deux infinis, ce qui annulerait la quantité $\frac{1}{M}+\frac{1}{N}$. Donc, au delà de ce même point, la courbe redescend vers l'axe de symétrie, en conservant

le sens de sa courbure. De plus, le même sens se maintient encore, comme nous allons le montrer, tant que la courbe continue à descendre ; en effet, le liquide de la figure partielle réalisée qui nous a servi de point de départ étant placé dans la concavité de la courbe, on voit d'abord sans peine qu'en tous les points de notre branche descendante, la normale est négative ; or si cette branche contenait un point d'inflexion, la quantité $\frac{1}{M}+\frac{1}{N}$ se réduirait, en ce point, au terme $\frac{1}{N}$, et, par suite, à cause du signe de la normale, serait également négative, tandis que, sur l'arc méridien de la figure partielle réalisée, le rayon de courbure et la normale étant tous deux positifs, la quantité $\frac{1}{M}+\frac{1}{N}$ est elle-même positive.

Mais la branche dont il s'agit ne peut descendre indéfiniment en se rapprochant toujours de l'axe de révolution, ou, en d'autres termes, ne peut tendre vers une asymptote parallèle à cet axe : car, au point situé à l'infini sur l'asymptote, la quantité $\frac{1}{M}+\frac{1}{N}$ se réduirait encore au terme $\frac{1}{N}$, et, par conséquent, serait encore négative ; il faut dès lors que notre branche passe par un minimum de distance à l'axe de révolution, et forme ainsi l'arc générateur d'un étranglement ; et comme cet étranglement ne saurait appartenir ni à l'onduloïde, ni au caténoïde, il constitue nécessairement le sommet d'un nœud de nodoïde.

Nous sommes donc invinciblement ramenés à la ligne méridienne du nodoïde, et nous devons en conclure que toutes les figures que l'on obtient dans les expériences du

§ 71 sont des nodoïdes partiels, quel que soit le degré de rapprochement des disques, pourvu qu'on dépasse la courbure sphérique, et quel que soit le volume de l'huile par rapport au diamètre des disques.

§ 74. Nous pouvons maintenant examiner quelle est la nature et quelles sont les limites des variations du nodoïde. Puisque, dans les expériences du § 71, on passe par une portion de sphère après laquelle, comme nous venons de le voir, naît immédiatement le nodoïde partiel, et puisque celui-ci varie ensuite d'une manière continue jusqu'à la phase où commence l'instabilité, il est clair que la portion de sphère constitue l'une des limites de ces variations, et qu'ainsi la limite des variations correspondantes du nodoïde complet est une suite indéfinie de sphères égales ayant leurs centres sur l'axe. Mais, pour peu que l'on y réfléchisse, on reconnaîtra que le seul mode possible de variation continue tendant vers cette limite est le suivant : à mesure que le nodoïde complet approche de la suite de sphères, les dimensions des nœuds ainsi que la distance de leurs sommets à l'axe diminuent de plus en plus, tandis que la courbure des arcs qui relient ces nœuds converge vers celle d'une circonférence de cercle ayant son centre sur ce même axe ; enfin, à la limite, les nœuds s'évanouissent entièrement, et les arcs ci-dessus deviennent autant de demi-circonférences tangentes les unes aux autres. Les sphères engendrées par ces demi-circonférences sont donc aussi tangentes, et il en résulte que l'une des limites des variations du nodoïde est, comme nous l'avons dit, une suite indéfinie de sphères égales qui se touchent sur l'axe.

Nous savons déjà (§ 50) qu'une semblable suite de sphères constitue l'une des limites des variations de l'onduloïde ; cette limite est donc commune aux deux figures,

et forme conséquemment la transition de l'une à l'autre ; c'est d'ailleurs ce que montrent encore les expériences du § 71, puisque, à partir du cylindre jusqu'à la portion de sphère, la figure réalisée appartient toujours à l'onduloïde.

La *fig.* 50 représente la ligne méridienne d'un nodoïde peu éloigné de la limite que nous venons de trouver.

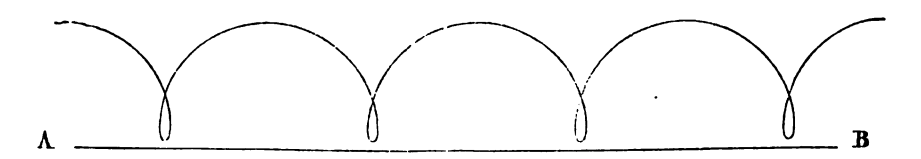


Fig. 50.

§ 75. Les variations du nodoïde ont une seconde limite fort remarquable. Supposons qu'on réalise, par le procédé exposé dans le § 67, la portion d'un nodoïde engendrée par un nœud isolé; supposons, en outre, qu'on répète successivement l'expérience en employant des anneaux solides de plus en plus grands et en modifiant le volume de l'huile de telle manière que la longueur du nœud méridien, c'est-à-dire la distance du sommet de celui-ci à sa pointe, demeure la même. Quand le diamètre de l'anneau solide sera très-considérable, les normales correspondantes aux différents points du nœud seront toutes très-grandes, de sorte qu'en tous ces points le terme $\frac{1}{N}$ de l'équation de l'équilibre sera très-petit, et l'on voit que ce terme convergera vers zéro à mesure que le diamètre de l'anneau solide convergera vers l'infini; mais il ne peut en être de même du terme $\frac{1}{M}$, car si ce dernier tendait aussi à s'annuler, la figure liquide aurait pour limite de ses

variations le caténoïde, ce qui est évidemment impossible dans les conditions où nous nous sommes placés, c'est-à-dire avec un nœud de longueur constante ; on pourra donc toujours concevoir l'anneau solide assez grand pour qu'en tous les points du nœud méridien le terme $\frac{1}{N}$ soit fort petit relativement au terme $\frac{1}{M}$. Alors celui-ci, qui exprime la courbure méridienne, devra, en vertu de l'équation de l'équilibre, varier très-peu sur tout le contour du nœud, et conséquemment ce dernier approchera beaucoup d'une circonférence de cercle. Il est clair que, dans ce cas, la courbure des arcs qui relient entre eux les nœuds consécutifs de la ligne méridiennne complète, sera aussi à peu près constante et du même ordre que celle de ces nœuds, car le terme $\frac{1}{N}$ sera également très-petit sur les arcs en question. On comprend, d'après cela, que les nœuds consécutifs de la ligne méridienne empiéteront les uns sur les autres, et qu'ainsi, pour un certain grand diamètre de l'anneau solide, cette ligne a la forme représentée partiellement *fig.* 51. Dans ce dessin, on n'a point indiqué

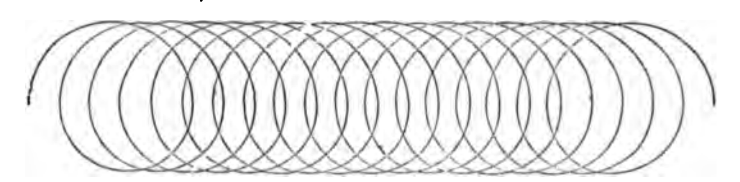


Fig. 51

l'axe de révolution, parce qu'il est placé à une trop grande distance.

Si l'on imagine que le diamètre de l'anneau solide reçoive un nouvel accroissement, la courbure méridienne approchera plus encore de l'uniformité, les nœuds seront

plus près d'être circulaires, et ils empièteront davantage les uns sur les autres ; enfin, à la limite de ces accroissements, c'est-à-dire lorsque le diamètre sera infini, le terme $\frac{1}{N}$ s'évanouira complétement pour tous les points de la ligne méridienne, ce qui réduira, pour cette ligne entière, l'équation de l'équilibre à $\frac{1}{M} = C$; le rayon de courbure sera donc alors rigoureusement constant, et nous arrivons à ce singulier résultat, que la totalité de la ligne méridienne se sera condensée en une seule circonférence de cercle ; et comme celle-ci se trouvera située à une distance infinie de l'axe de révolution, on voit que la figure engendrée sera simplement un cylindre.

Ainsi la seconde limite des variations du nodoïde est un cylindre; mais ce cylindre est placé transversalement par rapport à l'axe du nodoïde dont il dérive, et cet axe en est infiniment éloigné, tandis que le cylindre qui forme la seconde limite des variations de l'onduloïde (§ 50) a pour axe celui de cette dernière figure.

§ 76. Pour la réalisation partielle d'un nodoïde dont la ligne méridienne complète soit du genre de la *fig.* 51, il n'est pas nécessaire que l'anneau solide ait un diamètre absolu bien considérable; il suffit que ce diamètre soit grand relativement à la longueur du nœud méridien. En effet, si l'on se rappelle que, dans celui-ci, la courbure va (§ 66) en diminuant depuis le sommet jusqu'aux points où les tangentes sont parallèles à l'axe de symétrie, et que, de là jusqu'à la pointe, elle est moindre qu'en ces derniers points, on comprendra que si la longueur de ce même nœud est petite par rapport au rayon de l'anneau solide, sa largeur sera plus petite encore, et qu'à son sommet le rayon de

courbure sera minime en comparaison de la distance de ce sommet au centre de l'anneau, distance qui constitue la normale ; au sommet donc le terme $\frac{1}{N}$ sera peu de chose à côté du terme $\frac{1}{M}$, et la valeur de la quantité $\frac{1}{M}+\frac{1}{N}$ dépendra surtout de celle de ce dernier ; mais c'est au sommet que la normale est la moins grande ; donc, sur le reste du nœud et sur les arcs qui unissent ce nœud aux nœuds voisins de la ligne méridienne complète, le terme $\frac{1}{N}$ influera moins encore, et conséquemment, dans toute l'étendue de cette ligne, la courbure ne variera que faiblement.

Nous décrirons plus tard le meilleur moyen de réaliser les conditions que nous venons d'indiquer; du reste, c'est évidemment un nodoïde de cette espèce dont on obtient une portion en creux dans les expériences du § 65, lorsque les disques sont très-rapprochés et qu'on arrête l'extraction de l'huile au point où les éléments extrêmes de l'arc méridien sont couchés sur les faces des disques aux bords de celles-ci. Il en est encore de même dans les expériences du § 71, lorsque la distance des disques est très-petite et que les éléments extrêmes de l'arc méridien sont aussi près que possible d'être couchés sur les prolongements des faces solides ; seulement ici l'arc méridien n'appartient plus à un seul nœud : il est formé, comme on le reconnaîtra en jetant les yeux sur la *fig.* 51, de l'arc qui unit deux nœuds consécutifs et de deux portions de ces derniers.

§ 77. Enfin les variations du nodoïde ont, comme celles de l'onduloïde, une troisième limite ; elle nous est révélée par les expériences mêmes qui nous ont conduits à la

connaissance du nodoïde. Dans ces expériences (§§ 56 et 63), lorsque, après avoir formé un cylindre entre deux anneaux placés à une distance moindre que les $\frac{2}{3}$ de leur diamètre, on enlève progressivement du liquide, la figure partielle, nous le savons, devient d'abord un onduloïde, puis atteint par degrés le caténoïde, après quoi elle passe immédiatement au nodoïde; d'où il suit évidemment que le caténoïde est l'une des limites des variations du nodoïde, et, en outre, qu'il constitue une nouvelle transition de celui-ci à l'onduloïde; nous en avons déjà vu (§ 74) une autre, consistant dans la suite indéfinie de sphères.

La troisième limite des variations du nodoïde est donc le caténoïde, et il est aisé de faire comprendre comment la figure y parvient. Si nous nous rappelons que les expériences dont nous venons de parler réalisent la portion du nodoïde engendrée par un arc appartenant à un nœud et tournant sa concavité extérieurement, nous en conclurons que la portion du nodoïde qui passe au caténoïde est celle qui est engendrée par l'un des nœuds, dont le sommet devient celui de la chaînette méridienne. Cela posé, concevons que chacun des nœuds de la ligne méridienne complète se modifie graduellement pour arriver à la chaînette, et imaginons, pour fixer les idées, que, pendant toutes ces modifications, la distance des sommets à l'axe de révolution demeure constante. A mesure que les nœuds approcheront de la chaînette, la quantité $\frac{1}{M}+\frac{1}{N}$ convergera vers zéro; or, sur tous les arcs qui unissent les nœuds entre eux, les quantités M et N sont de même signe, et conséquemment la quantité $\frac{1}{M}+\frac{1}{N}$ relative à ces arcs ne peut converger vers zéro

que si M et N convergent à la fois vers l'infini ; tous les points de ces mêmes arcs s'éloigneront donc indéfiniment de l'axe de révolution, en même temps que leur courbure deviendra indéfiniment plus faible; d'où il suit que les pointes des nœuds s'éloigneront de plus en plus de l'axe, tandis que, par le développement croissant des arcs intermédiaires, lesquels, d'après la nature de la courbe, ne peuvent évidemment diminuer de courbure sans s'étendre davantage, les nœuds s'écarteront de plus en plus les uns des autres, jusqu'à ce que, à la limite, ils soient tous infiniment distants et infiniment allongés. Si donc nous en considérons un en particulier, toute la courbe se réduira à lui seul, et, d'autre part, sa pointe aura disparu, et il se trouvera transformé en la ligne méridienne d'un caténoïde, c'est-à-dire en une chaînette.

§ 78. Il nous reste à résoudre une dernière question : y a-t-il d'autres figures d'équilibre de révolution que celles dont nous avons jusqu'ici reconnu l'existence? Toutes ces dernières sont telles que l'on peut toujours en comprendre des portions entre deux disques égaux et parallèles; or nos expériences ont épuisé toutes les combinaisons de ce genre; d'où l'on doit conclure que s'il y avait encore d'autres figures, elles seraient de nature à ne pouvoir remplir cette condition, et il faudrait évidemment, pour cela, que leurs lignes méridiennes ne présentassent aucun point dont la distance à l'axe de révolution fût un maximum ou un minimum. Comme ces lignes ne pourraient d'ailleurs atteindre l'axe, elles devraient aller en s'en éloignant toujours, depuis un premier point situé à l'infini sur une asymptote parallèle à cet axe, jusqu'à un autre point situé également à l'infini. Cela posé, au premier de ces deux points

extrêmes, le rayon de courbure serait nécessairement infini, tandis que la normale serait finie, et l'équation de l'équilibre s'y réduirait à $\frac{1}{N} = C$; or il résulte de là que la courbure ne pourrait nulle part changer de sens : car s'il y avait un point d'inflexion, l'équation de l'équilibre s'y réduirait également à $\frac{1}{N} = C$, et conséquemment les normales au premier point extrême ci-dessus et à ce point d'inflexion devraient être égales, ce qui est évidemment impossible. Dès lors la courbe étant exempte de toute ondulation, la courbure convergerait nécessairement vers zéro, ou, ce qui revient au même, le rayon de courbure convergerait vers l'infini, en approchant du second point extrême, en sorte qu'en ce point le terme $\frac{1}{M}$ s'évanouirait comme au premier, ce qui exigerait, de même que précédemment, l'égalité impossible des deux normales.

Les seules figures d'équilibre de révolution d'une masse liquide sans pesanteur sont donc celles auxquelles nous sommes arrivé, savoir : la sphère, le plan, le cylindre, l'onduloïde, le caténoïde et le nodoïde.

Ainsi il n'y a pas de figure d'équilibre de révolution ayant, dans son état complet, la forme annulaire, et la sphère est la seule qui soit fermée ; nous pouvons conséquemment restreindre encore la possibilité d'une surface fermée, autre que la sphère, à courbure moyenne constante, et ajouter à ce que nous avons dit dans le § 34, que s'il existe une semblable surface, elle n'est pas derévolution.

§ 79. Voyons maintenant les résultats des géomètres. Dans sa *Nouvelle théorie de l'action capillaire* (1) publiée

(1) Chap. VI de cet ouvrage.

en 1831, Poisson, cherchant à déterminer l'équation de la surface libre d'une petite quantité d'un liquide pesant comprise entre deux plans solides horizontaux, arrive d'abord à une équation différentielle du deuxième ordre, contenant un terme dans lequel la quantité g, ou la gravité, entre implicitement comme facteur, équation qui, si l'on faisait $g=o$, se réduirait, comme cela doit être, à celle de nos figures d'équilibre de révolution, mise sous la forme différentielle. Il fait voir ensuite que, dans une certaine hypothèse relative au volume du liquide, hypothèse qui revient à prendre ce volume assez petit pour que l'influence de la gravité soit très-minime par rapport à celle des actions moléculaires, on peut, dans une première approximation, négliger le terme dont il s'agit, ce qui est conséquemment la même chose que de supposer le liquide sans pesanteur. Poisson obtient la première intégrale de l'équation ainsi réduite, puis il remarque qu'on pourra toujours obtenir la seconde au moyen des fonctions elliptiques, et, dans quelques cas, au moyen des arcs de cercle et des logarithmes.

§ 80. En 1831 également, Goldschmidt a étudié analytiquement (1) la surface engendrée par la chaînette, c'est-à-dire le caténoïde. Les conclusions auxquelles nous sommes parvenus, concordent pleinement avec celles qu'il déduit de ses formules. Il trouve la valeur précise du rapport limite entre le rayon des bases et l'écartement de celles-ci, et du nombre qu'il donne, on tire, pour le rapport limite entre cet écartement et le diamètre des bases, la valeur 0,6627, valeur qui est effectivement, on le voit, très-voisine de 0,6666, ou $\frac{2}{3}$.

(1) *Determinatio superficiei minimæ rotatione curvæ data duo puncta jungentis circa datum axem ortæ* (Goettingue, 1831).

Goldschmidt indique une construction géométrique élégante pour déterminer la position des sommets respectifs des deux chaînettes méridiennes, dans le cas d'un écartement des bases moindre que la limite. Il en déduit cette conséquence, qu'à la limite même, si, du point où l'axe de symétrie de la chaînette unique coupe l'axe de révolution, l'on mène une tangente à la courbe, le point de contact est à l'une des extrémités de l'arc intercepté. On conclut de là que si l'on mène également une tangente à l'autre extrémité du même arc et qu'on prolonge ces deux tangentes, elles iront toucher aussi à ses extrémités l'arc méridien opposé. Cette propriété caractérise d'une manière simple le caténoïde limite.

Goldschmidt montre qu'au delà de l'écartement limite, on n'obtient plus, comme surface de révolution à aire minima s'appuyant sur les bases, que l'ensemble de deux plans occupant respectivement ces dernières.

Enfin il arrive au résultat suivant : l'aire engendrée par la révolution d'une portion quelconque de la chaînette méridienne, est égale à la moitié de l'aire du cylindre ayant pour base le cercle de gorge et pour hauteur la portion de l'axe comprise entre les normales menées aux deux extrémités de l'arc générateur.

§ 81. MM. Lindelöf et Moigno ont traité de nouveau, en 1861, le problème du caténoïde (1); ils retrouvent, par une méthode plus courte, plusieurs des résultats de Goldschmidt. Ils arrivent, en outre, à cet autre résultat : pour un arc de chaînette dont une extrémité A est prise à volonté, le minimum de la surface de révolution cesse d'avoir lieu lorsque la seconde extrémité B, en s'éloignant suivant la courbe, atteint une

(1) *Leçons de calcul des variations*. Paris, 1861, Nos 102 à 105.

position telle que les deux tangentes menées en A et en B se rencontrent en un point de l'axe de révolution.

Cette propriété fournit donc la condition générale à laquelle doivent satisfaire tous les caténoïdes limites, que leurs bases soient égales ou inégales.

§ 82. Delaunay a donné [1], en 1841, une génération extrêmement simple et bien remarquable des lignes méridiennes des surfaces de révolution à courbure moyenne constante : il a fait voir, au moyen du calcul, que ces lignes peuvent être décrites par l'un des foyers d'une section conique, lorsque celle-ci roule sur une ligne droite. Cette ligne droite est alors l'axe de révolution de la surface.

Plus tard M. Lamarle [2] a démontré géométriquement le même principe à l'aide de ses méthodes nouvelles et si fécondes.

Ces deux géomètres se contentent de la démonstration du principe dont il s'agit, sans chercher les formes des lignes ainsi tracées; seulement Delaunay rappelle que la chaînette peut être engendrée de cette manière par le foyer d'une parabole; mais il est aisé de voir que les lignes résultant de ce mode de génération présentent toutes les particularités de forme et toutes les modifications que j'ai conclues, ainsi qu'on l'a vu, de l'expérience et du raisonnement, et que Beer avait, de son côté, partiellement déduites du calcul, comme je le dirai bientôt.

En effet, on reconnaît d'abord évidemment que lorsque la courbe roulante est une ellipse, la ligne décrite par

(1) *Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante* (JOURN. DE M. LIOUVILLE, t. VI, p. 309).

(2) *Théorie géométrique des rayons et centres de courbure* (BULLET. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, 1857, 2me série, t. II, p. 33).

l'un quelconque des foyers est une courbe sinueuse se reproduisant périodiquement le long de la droite, et présentant alternativement un maximum et un minimum de distance à cette droite : ce sera, par conséquent, la ligne méridienne de l'onduloïde.

Plus le rapport des axes de l'ellipse se rapprochera de l'unité, moins les sinuosités de la ligne décrite seront prononcées, et si ces deux axes sont égaux, c'est-à-dire si la courbe roulante est un cercle, la ligne décrite devient une droite parallèle à la première, et la figure de révolution devient un cylindre.

Au contraire, plus le rapport des axes de l'ellipse s'éloignera de l'unité, plus les sinuosités seront fortes. Si, le grand axe conservant une valeur finie, le petit axe diminue jusqu'à s'annuler, de sorte que l'ellipse se réduise à son grand axe, aux extrémités duquel se trouvent alors les foyers, la ligne décrite consistera en une suite de demi-circonférences de cercle qui se touchent sur la droite ; la figure de révolution est donc, dans ce cas, une suite de sphères égales tangentes les unes aux autres sur l'axe, et dont rien n'empêche de concevoir l'une quelconque isolée.

Si, l'ellipse étant toujours réduite à son grand axe, on suppose que celui-ci devienne de plus en plus long, mais que, pour chacune de ses longueurs, son extrémité décrivante parte du même point de la droite fixe, la demi-circonférence tracée par une rotation ira en augmentant de plus en plus en dimensions, et, à la limite, c'est-à-dire quand l'autre extrémité du grand axe se sera éloignée à l'infini, la ligne décrite sera une droite perpendiculaire à la droite fixe ; ce sera la ligne méridienne du plan.

Si l'on prend de nouveau des ellipses non réduites à

leur grand axe, et qu'on les suppose de plus en plus grandes, mais telles que la distance du foyer décrivant au sommet correspondant soit la même pour toutes, les parties rentrantes des lignes tracées s'approcheront toutes jusqu'à cette même distance de la droite; mais les parties convexes vers l'extérieur présenteront des dimensions de plus en plus étendues, et enfin, à la limite des accroissements de l'ellipse, c'est-à-dire lorsque celle-ci se sera transformée en une parabole, la ligne décrite n'aura plus qu'une seule partie rentrante, toutes les autres s'étant éloignées à l'infini : ce sera une chaînette, et la figure engendrée sera le caténoïde.

Reste le cas où la courbe roulante est une hyperbole. Au premier abord, on ne voit pas bien qu'on puisse faire rouler une hyperbole sur une ligne droite, de manière que l'un des foyers décrive une ligne continue; mais remarquons que lorsque l'une des parties de l'hyperbole aura roulé tout entière sur la droite, de sorte que celle-ci, primitivement asymptotique à l'une des branches, sera devenue asymptotique, à l'autre branche, la seconde partie de l'hyperbole aura en même temps la droite pour asymptote et pourra être considérée comme la touchant à une distance infinie; il y aura donc continuité mathématique dans le roulement si nous faisons alors rouler sur la droite cette seconde moitié de l'hyperbole, et si, après qu'elle aura à son tour roulé en totalité de manière que la droite soit redevenue tangente commune, nous recommençons à faire rouler la première moitié, et ainsi de suite. Or on se convaincra aisément que la ligne tracée dans ces circonstances par un même foyer est une courbe continue qui présente, le long de la droite, une succession

indéfinie de nœuds; c'est donc la ligne méridienne du nodoïde, et en faisant varier le rapport des axes de l'hyperbole roulante, on produira toutes les variations de cette figure.

Lorsque l'hyperbole passera à la parabole, la ligne décrite se réduira à une chaînette, et la figure engendrée sera un caténoïde. Lorsque, l'axe réel de l'hyperbole conservant une valeur finie, l'axe imaginaire s'annulera, ce qui placera les foyers aux extrémités du premier et réduira l'hyperbole à deux droites situées dans le prolongement l'une de l'autre et partant de ces mêmes extrémités, on voit sans peine que les nœuds disparaîtront, et que la ligne décrite deviendra une suite de demi-circonférences, de sorte que la figure engendrée sera la suite de sphères. Enfin lorsque, l'axe réel de l'hyperbole conservant encore une valeur finie, l'axe imaginaire croîtra indéfiniment, ce qui ouvrira de plus en plus les deux moitiés de l'hyperbole en éloignant les foyers des sommets, on voit de même facilement que les nœuds de la ligne décrite s'élargiront, puis empiéteront les uns sur les autres, c'est-à-dire que cette courbe éprouvera les modifications dont j'ai parlé dans le § 75; seulement la limite de ces variations, savoir la condensation de la courbe entière en une seule circonférence de cercle, est, au point de vue du roulement, une limite mathématique qui ne peut être atteinte en réalité, puisque alors les foyers sont à des distances infinies de la droite, et que la moitié de l'hyperbole qui s'appuie sur celle-ci est confondue avec elle dans toute son étendue.

Cette discussion du tracé des lignes méridiennes devait naturellement trouver place après l'exposé du principe de Delaunay; mais je dois dire ici qu'une dis-

cussion analogue a déjà été publiée par M. Lindelöf, dans un Mémoire dont je parlerai au § 89.

§ 83. Le calcul de Delaunay et la démonstration de M. Lamarle mentionnée plus haut n'excluent pas la possibilité de surfaces de révolution à courbure moyenne constante autres que celles dont les lignes méridiennes sont tracées comme ci-dessus; mais M. Lamarle est revenu ensuite [1] sur le même sujet, et a fait voir, toujours au moyen des méthodes qui lui sont propres, que ce mode de génération est le seul qui puisse donner des surfaces de révolution à courbure moyenne constante. Cette conclusion est, on le voit, entièrement d'accord avec celle que nous avons déduite du raisonnement (§ 78).

§ 84. Beer a consacré à l'état de repos de la masse liquide une partie du second des deux Mémoires où il m'a fait l'honneur d'appliquer le calcul aux expériences de ma première Série [2]. Il s'occupe uniquement des figures d'équilibre de révolution, et il cherche, au moyen des fonctions elliptiques, l'intégrale complète de l'équation de leurs lignes méridiennes. Comme j'aurai occasion de faire usage de ces résultats, je vais indiquer, en peu de mots, comment Beer parvient à la première et à la seconde intégrale.

Il prend l'axe de révolution pour axe des y. Alors, p et q désignant respectivement les coefficients différentiels du premier et du second ordre, on a, comme on sait, pour représenter la normale, l'expression $\frac{x\sqrt{1+p^2}}{p}$, et,

(1) *Exposé géométrique du calcul différentiel et intégral*, 3e partie, 1863, p. 247, (Mém. de l'Acad. de Belgique, collection in-8°, t. XV).

(2) *Tractatus de theoriâ mathematicâ phænomenorum in liquidis actioni gravitatis detractis observatorum*. Bonn, 1857.

pour le rayon de courbure, $\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$; en égalant à une constante la somme des inverses de ces deux quantités, on a conséquemment, pour l'équation des figures en question,

$$\frac{q}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{p}{x\sqrt{1+p^2}}=\mathrm{C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [1]$$

Maintenant, si l'on multiplie les deux membres par xdx, et qu'on remplace qdx par son équivalent dp, il vient :

$$\frac{xdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{pdx}{\sqrt{1+p^2}}=\mathrm{C}xdx\,;$$

or il est facile de voir que le premier membre de l'équation ainsi transformée est la différentielle de $\frac{px}{\sqrt{1+p^2}}$; on aura donc, en intégrant,

$$\frac{px}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{\mathrm{C}x^2}{2}+\mathrm{C}' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [2]$$

C′ étant la constante arbitraire. Telle est l'intégrale première cherchée.

Représentant alors par α_1 et α_2 les abscisses respectives minima et maxima de la courbe, Beer transforme cette équation en la suivante :

$$dy=\frac{x^2\pm\alpha_1\alpha_2}{\sqrt{(\alpha_1^2-x^2)(x^2-\alpha_2^2)}}dx\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [3]$$

puis il passe à l'intégration par les fonctions elliptiques. Il pose

$$x^2=\alpha_1^2\sin^2\varphi+\alpha_2^2\cos^2\varphi,$$

et, plaçant l'origine des coordonnées au pied de

l'abscisse minima α_1, il obtient, en définitive, pour représenter la ligne méridienne, l'équation

$$y=\alpha_2\left\{E\left(c,\frac{\pi}{2}\right)-E(c,\varphi)\right\}\pm\alpha_1\left\{F\left(c,\frac{\pi}{2}\right)-F(c,\varphi)\right\}. \quad [4]$$

dans laquelle les lettres F et E désignent respectivement les fonctions elliptiques de première et de seconde espèce. Le module c et l'amplitude φ sont définis par les relations :

$$c=\sqrt{\frac{\alpha_2^2-\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}, \quad \varphi=\arc\sin\sqrt{\frac{\alpha_2^2-x^2}{\alpha_2^2-\alpha_1^2}}.$$

§ 85. Beer déduit de ces formules les résultats suivants :

L'équation [4] représente deux genres de courbes, selon qu'on prend le supérieur ou l'inférieur des deux signes qui affectent l'un des termes du second membre.

Au signe supérieur correspond une ligne ondulée analogue à la sinusoïde, et formée de parties identiques qui se reproduisent indéfiniment le long de l'axe. L'abscisse des points d'inflexion est moyenne proportionnelle entre les abscisses minima et maxima. La tangente en ces mêmes points est égale à $\frac{2\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{\alpha_2-\alpha_1}$. La distance entre les abscisses minima et maxima a pour valeur

$$y'=\alpha_2 E\left(c,\frac{\pi}{2}\right)+\alpha_1 F\left(c,\frac{\pi}{2}\right);$$

en doublant cette expression, on a, dans la figure engendrée, l'intervalle entre le cercle de gorge d'un étranglement et celui de l'étranglement suivant. Les limites des variations qu'éprouve cette figure quand on fait varier le rapport entre α_1 et α_2, sont la sphère

et le cylindre. On pourra réaliser cette même figure, en faisant adhérer une masse d'huile à un cylindre solide au sein d'un alcool de même densité que l'huile.

En prenant, dans l'équation [4], le signe inférieur, on a également une ligne composée de parties identiques qui se reproduisent le long de l'axe. Si l'on considère l'une de ces parties commençant à un minimum d'abscisse, elle descend d'abord en tournant sa concavité vers le haut, atteint un point inférieur où la tangente est parallèle à l'axe des x et dont l'abscisse est moyenne proportionnelle entre les abscisses minima et maxima, puis remonte, en conservant toujours le même sens de courbure, jusqu'au maximum d'abscisse, au delà duquel elle continue jusqu'à un nouveau minimum par une portion symétrique à la première. La distance entre les abscisses minima et maxima a pour expression

$$y' = \alpha_2 E\left(c, \frac{\pi}{2}\right) - \alpha_1 F\left(c, \frac{\pi}{2}\right).$$

Les limites des variations de la figure engendrée sont, d'une part, la sphère, et, d'autre part, une circonférence de cercle ayant son centre sur l'axe et son plan perpendiculaire à celui-ci. La ligne méridienne ci-dessus sera celle d'une masse alcoolique entourant, au sein d'une huile de même densité, un cylindre métallique.

§ 86. Présentons ici quelques remarques au sujet de cette partie du travail de Beer. Les deux lignes méridiennes qu'il discute sont celles de l'onduloïde et du nodoïde ; mais, on le voit, une autre ligne méridienne, savoir celle du caténoïde, lui a complétement échappé ; il l'aurait trouvée en faisant, dans l'intégrale première (éq. [3] du § 84), la quantité α_2 égale à l'infini.

En second lieu, par suite de cette singulière omission, Beer n'assigne aux variations des figures engendrées par les deux premières que deux limites, au lieu de trois qu'elles ont en réalité.

Du reste, ces lacunes se trouvent remplies dans un ouvrage posthume (1) du même auteur, publié en 1869.

En troisième lieu, il trouve, pour la seconde limite de la deuxième figure, une simple circonférence de cercle, tandis que j'ai trouvé un cylindre placé transversalement par rapport à l'axe des nodoïdes dont il dérive. Cette différence tient à ce que Beer considère ce que devient la figure à mesure que les abscisses maxima et minima de la ligne méridienne approchent de l'égalité, mais en conservant des valeurs finies, tandis que, rendant au contraire constante la différence de ces deux abscisses, j'ai supposé qu'elles convergeaient toutes deux vers l'infini, ou, pour parler plus exactement, que l'axe de révolution s'éloignait indéfiniment de la courbe (§ 75). Je n'ai point parlé de la limite consistant en une simple circonférence, parce qu'elle ne peut constituer une figure liquide; c'est une limite mathématique, et non physique.

Enfin, quant au moyen indiqué par Beer pour la réalisation partielle de la deuxième figure, c'est-à-dire du nodoïde, il est exact théoriquement, mais il serait d'une application bien difficile; on peut se convaincre, en effet, par ce que j'ai exposé dans le § 71, qu'une semblable figure liquide dépasserait de beaucoup sa limite de stabilité; on ne pourrait donc l'obtenir qu'en la maintenant par des entraves convenables.

Nous avons donc cherché, Beer et moi, par des

(1) *Einleitung in die mathematische Theorie der Elasticität und Capillarität.* Leipzig.

moyens essentiellement différents, les formes des figures d'équilibre de révolution. Ainsi qu'on l'a vu (§ 82), on pouvait arriver à ces formes en partant du principe de Delaunay ; mais Beer, par la simplicité et l'élégance qu'il a su donner à l'équation différentielle du premier ordre et à l'intégrale elliptique, a facilité l'étude analytique et la construction exacte des lignes méridiennes de l'onduloïde et du nodoïde, et, de mon côté, en réalisant physiquement toutes les figures d'équilibre de révolution, avec leurs variations et les limites de celles-ci, j'ai fourni à la théorie l'appui des vérifications expérimentales. De plus, en n'employant, conjointement avec l'expérience, que le seul raisonnement ou des constructions géométriques très-simples, j'ai rendu nettement accessibles à l'esprit les relations entre les formes dont il s'agit et la condition générale de l'équilibre, et j'ai mis la recherche de ces mêmes formes à la portée des personnes qui ne sont point familiarisées avec les hautes mathématiques.

§ 87. Dans le même Mémoire, Beer détermine les expressions du volume et de la surface d'une portion de sa première figure, ou, en d'autres termes, de l'onduloïde, cette portion étant comprise entre deux sections perpendiculaires à l'axe. Pour cela, dans les formules générales qui représentent le volume et la surface d'une figure quelconque de révolution, il remplace dy par son équivalent (éq. [3] du § 84), puis il intègre par les fonctions elliptiques; le module et l'amplitude sont les mêmes que précédemment.

On reconnaît aisément que la substitution ci-dessus permettrait d'intégrer également par les fonctions elliptiques dans le cas du nodoïde.

On s'assurera d'ailleurs sans peine qu'on obtient par une intégration ordinaire le volume et la surface d'une portion de caténoïde; on pourra donc évaluer, pour toutes les figures d'équilibre de révolution, le volume et la surface d'une portion limitée par deux sections quelconques perpendiculaires à l'axe.

§ 88. M. Mannheim a présenté, en 1858, à la Société Philomatique de Paris (1), sur la théorie des *roulettes*, une Note dans laquelle il pose d'abord ce théorème :

Lorsqu'une courbe plane ABC roule sur une droite fixe EF, la roulette décrite par un point M lié à la courbe roulante a même longueur que la courbe GPH, lieu des projections du point M sur les tangentes à ABC (2).

Puis il en déduit plusieurs corollaires, parmi lesquels se trouve le suivant :

La courbe décrite par le foyer d'une ellipse qui roule sur une droite a même longueur que la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre.

On sait, en effet, que le lieu des projections du foyer d'une ellipse sur les tangentes à celle-ci est une circonférence de cercle ayant le grand axe pour diamètre.

M. Mannheim ne parle point de la courbe décrite par le foyer d'une hyperbole roulante; mais on sait également que le lieu des projections du foyer d'une hyperbole sur les tangentes est une circonférence de cercle

(1) Journal *l'Institut*, n° 1260.

(2) Plus tard, M. Mannheim a reconnu (JOURN. DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, XLme cahier) que ce théorème avait été énoncé dès 1840 par Steiner.

Quelques temps après la publication de l'article de M. Mannheim, M. Lamarle a donné (BULLET. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, 1858, 2me série, t. IV, p. 239), à l'aide de ses nouvelles méthodes, une démonstration extrêmement simple de ce même théorème.

ayant pour diamètre l'axe réel de l'hyperbole, d'où il suit que la courbe tracée par l'un des foyers a même longueur que la circonférence en question. Cette extension à la ligne méridienne du nodoïde a, du reste, été signalée déjà par M. Lindelöf (§ suivant).

Le principe de M. Mannheim permet, on le voit, d'évaluer la longueur de portions déterminées de la ligne méridienne de l'onduloïde et de celle du nodoïde, quand on a le grand axe de l'ellipse roulante et l'axe réel de l'hyperbole roulante; or ces axes sont connus lorsqu'on connaît les distances minima et maxima de la courbe décrite à la droite fixe; en effet, si l'on se représente l'ellipse roulante dans la position où son grand axe est perpendiculaire à la droite fixe, on voit que le foyer décrivant est alors le plus près ou le plus loin de cette droite, et qu'ainsi les distances minima et maxima ci-dessus sont celles de ce foyer aux deux sommets de l'ellipse; le grand axe est donc égal à leur somme. On trouvera de même que l'axe réel de l'hyperbole roulante est égal à la différence des distances maxima et minima de la courbe décrite à la droite fixe.

L'énoncé de M. Mannheim relatif à la ligne méridienne de l'onduloïde se rapporte au développement entier de l'ellipse roulante sur la droite fixe; mais, on le comprend, le théorème général s'applique également à une portion moindre quelconque de ce développement et conséquemment de la courbe décrite.

Du reste, en substituant, dans l'expression générale $\int dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ d'un arc de courbe, la valeur de $\frac{dy}{dx}$ relative aux lignes méridiennes de l'onduloïde et du

nodoïde (éq. [3] du § 84), on s'assurera que l'intégration s'effectue aisément par les moyens ordinaires.

Comme la ligne méridienne du caténoïde, ou la chaînette, est rectifiable, on voit qu'on pourra toujours évaluer, soit par une construction géométrique, soit par le calcul, la longueur d'un arc donné de chacune des lignes méridiennes des figures d'équilibre de révolution.

§ 89. En 1863, M. Lindelöf a repris (1) toute la question des surfaces de révolution à courbure moyenne constante. Partant du théorème de Delaunay (§ 82), il cherche spécialement les relations entre les propriétés des surfaces en question et les éléments de la conique roulante. Il déduit de ses calculs une suite de résultats presque tous nouveaux que je vais mentionner.

Disons d'abord que l'auteur nomme onduloïde complet et nodoïde complet les portions de l'onduloïde et du nodoïde indéfinis dont les lignes méridiennes correspondent respectivement à une révolution entière de l'ellipse et de l'hyperbole génératrices. Voici maintenant les résultats :

1° La somme des courbures principales en chaque point de la surface est, pour l'onduloïde, égale à la courbure du cercle circonscrit à l'ellipse génératrice, et, pour le nodoïde, égale à la courbure d'un cercle ayant pour diamètre l'axe transverse de l'hyperbole génératrice.

2° Rectification de la ligne méridienne de l'onduloïde complet, donnée antérieurement par M. Mann-

(1) *Théorie des surfaces de révolution à courbure moyenne constante* (Mém. de la Société des sciences de Finlande).
Un résumé détaillé de ce Mémoire est inséré dans le journal *Les Mondes* (t. III, pp. 394, 414 et 431).

heim, avec extension à la ligne méridienne du nodoïde complet.

3° Mesure de l'aire du caténoïde engendrée par une portion quelconque de la chaînette méridienne, trouvée déjà par Goldschmidt (§ 80).

4° Le volume du caténoïde terminé par deux plans quelconques perpendiculaires à l'axe égale la moitié de celui du cylindre ayant pour base le cercle de gorge, et pour hauteur la partie de l'axe comprise entre les normales extrêmes à une méridienne.

5° Le volume du caténoïde s'obtient aussi en multipliant la surface de ce caténoïde par le demi-rayon du cercle de gorge.

6° Le volume du caténoïde limite est la moitié de celui du cylindre de même base et de même hauteur (1).

7° L'aire d'un onduloïde complet équivaut à celle d'un cylindre dont la base est le cercle circonscrit à l'ellipse génératrice d'une méridienne, et dont la hauteur est la circonférence d'une ellipse ayant pour axes les diamètres du plus grand et du plus petit cercle parallèle.

8° L'aire d'un nodoïde complet équivaut à celle du cylindre dont le diamètre est l'axe transverse de l'hyperbole génératrice d'une méridienne, et dont la hauteur est la circonférence d'une ellipse ayant pour axes les diamètres du plus grand et du plus petit cercle parallèle.

9° Le volume d'un onduloïde complet surpasse celui d'un cylindre dont la base est le cercle circonscrit à l'ellipse génératrice d'une méridienne, et dont la

(1) J'avais trouvé ce résultat longtemps auparavant, et je l'avais communiqué à M. Lindelöf, ainsi qu'il le déclare dans son Mémoire. Ce même résultat n'est pas reproduit dans le résumé du journal *Les Mondes*.

hauteur égale la circonférence de l'ellipse ayant pour axes les diamètres du plus grand et du plus petit cercle parallèle, du tiers de l'excès de ce même cylindre sur un second cylindre de même hauteur que l'onduloïde, et dont la base est le cercle inscrit à l'ellipse génératrice.

10° Le volume du nodoïde complet surpasse celui du cylindre dont le diamètre est égal à l'axe transverse de l'hyperbole génératrice d'une méridienne, et dont la hauteur égale la circonférence de l'ellipse ayant pour axes les diamètres du plus grand et du plus petit cercle parallèle, du tiers de la somme de ce même cylindre et d'un second cylindre de même hauteur que le nodoïde, et dont le diamètre est égal à l'axe conjugué de l'hyperbole génératrice.

§ 90. J'ai soumis à l'expérience le résultat 6° du paragraphe précédent. Pour cela, il fallait réaliser, dans le liquide alcoolique, un caténoïde limite plein, puis le convertir en cylindre par le rapprochement des bases. Mais comme toute l'huile du caténoïde devait être contenue dans ce cylindre, il fallait éviter la formation des bases convexes de celui-ci, et conséquemment comprendre la masse liquide entre des disques et non entre des anneaux. Dans ces conditions, le seul moyen à employer pour obtenir le caténoïde limite était d'écarter les disques l'un de l'autre d'une quantité égale à la hauteur du caténoïde limite correspondant à leur diamètre, puis de faire adhérer à leurs faces en regard une masse d'huile en excès, et enfin d'absorber de ce liquide jusqu'à ce que le cercle de gorge eût le diamètre appartenant à ce même caténoïde limite.

Le diamètre des disques dont j'ai fait usage était de $71^{mm},49$; la hauteur du caténoïde limite corres-

pondant à ce diamètre devait donc (§ 80) être égale à $71^{mm},49 \times 0,6627 = 47^{mm},38$.

MM. Lindelöf et Moigno ont trouvé [1], pour le rapport du rayon des bases à celui du cercle de gorge, la valeur 1,81017, dont l'inverse est 0,5524 (voir aussi le tableau du § suivant); avec mes disques, le diamètre du cercle de gorge devait donc être égal à $71^{mm},49 \times 0,5524 = 39^{mm},49$.

On a réglé l'écartement de ces disques au moyen du cathétomètre, et, pour régler de même le diamètre du cercle de gorge de la figure liquide, on a couché le cathétomètre horizontalement sur des supports convenables.

Une difficulté accidentelle a empêché qu'on n'atteignît l'écartement précis $47^{mm},38$; celui auquel on s'est arrêté était, d'un côté de la figure, $46^{mm},85$, du côté opposé $47^{mm},05$, et conséquemment, en moyenne, $46^{mm},95$, quantité inférieure à la valeur théorique d'un peu moins du centième de celle-ci.

En ce qui concerne le cercle de gorge, on a conduit l'absorption de l'huile jusqu'à ce que le diamètre de ce cercle fût réduit à $39^{mm},60$, quantité qui excède à peine la valeur théorique des trois millièmes de celle-ci.

La figure ainsi obtenue approchait donc extrêmement du caténoïde limite, et conséquemment son volume devait être à fort peu près celui d'un cylindre de même base et d'une hauteur égale à la moitié de la distance des disques, c'est-à-dire égale à $23^{mm},47$; or, après avoir abaissé le disque supérieur jusqu'à ce que la figure parût exactement cylindrique, la mesure de la hauteur de ce cylindre

(1) Voir la note du § 81.

a donné, d'un côté $23^{mm},00$, et, du côté opposé, $23^{mm},07$, moyenne $23^{mm},03$. La différence entre ce résultat et la hauteur théorique $23^{mm},47$ est de $0^{mm},44$, qui n'est pas les deux centièmes de cette hauteur théorique; elle provient sans doute, en grande partie, de ce qu'il y a toujours une petite incertitude sur le point exact où la forme cylindrique est rigoureusement atteinte.

Bien que cette expérience laisse quelque chose à désirer quant à la précision, on peut cependant, je pense, la regarder comme fournissant une vérification suffisante du principe théorique.

§ 91. Dans un article [1] publié en 1869, M. Lindelöf rappelle un principe énoncé dans l'ouvrage écrit en commun par lui et par M. Moigno, principe que j'ai mentionné au § 81 ; il en tire des formules générales et des nombres exacts relatifs à la limite de hauteur du caténoïde partiel compris entre des bases dont les diamètres ont entre eux un rapport quelconque, et il consigne ses résultats dans deux tableaux.

Le premier de ces tableaux donne les diamètres des deux bases, la hauteur limite du caténoïde et la distance de la plus petite base au cercle de gorge, quand on suppose le diamètre de ce dernier invariable et pris pour unité, et qu'on fait varier par dixièmes d'unité, depuis 1 jusqu'à 0, le rapport des diamètres des bases.

Le second prend comme quantité constante et égale à l'unité le diamètre de la base inférieure, et fait varier depuis 1 jusqu'à 0 celui de la base supérieure; il contient, dans ces conditions, les hauteurs limites

(1) *Sur les limites entre lesquelles le caténoïde est une surface minima* (Annales de mathématiques de MM. Clebsch et Neumann, vol. II, p. 160).

correspondantes du caténoïde, les diamètres du cercle de gorge, et les distances de celui-ci à la base supérieure. Je reproduis ici ce second tableau :

Diamètre de la base inférieure = 1.

DIAMÈTRE DE LA BASE SUPÉRIEURE.	HAUTEUR LIMITE DU CATÉNOÏDE.	DIAMÈTRE DU CERCLE DE GORGE.	DISTANCE DU CERCLE DE GORGE A LA BASE SUPÉRIEURE.
1,0	0,66274	0,55243	0,33137
0,9	0,62835	0,52313	0,29765
0,8	0,59116	0,49009	0,26280
0,7	0,55064	0,45271	0,22696
0,6	0,50609	0,41028	0,19037
0,5	0,45654	0,36199	0,15341
0,4	0,40057	0,30693	0,11668
0,3	0,33595	0,24415	0,08107
0,2	0,25878	0,17268	0,04795
0,1	0,16059	0,09165	0,01941
0,0	0,00000	0,00000	0,00000

§ 92. Pour terminer ce qui est relatif aux surfaces d'équilibre de révolution, j'ajouterai ici que j'ai cherché les expressions des rayons de courbure des lignes méridiennes respectives de l'onduloïde et du nodoïde au minimum et au maximum de distance à l'axe, et que j'ai trouvé ces expressions fort simples.

Voyons d'abord celles qui concernent l'onduloïde. Pour y arriver commodément, partons de la formule générale de l'équilibre en fonction du rayon de courbure et de la normale. Désignons par ρ_1 et ρ_2 les rayons de courbure respectivement correspondants aux deux points dont il s'agit, points pour lesquels, en conservant les

notations de Beer (§ 84), les normales sont α_1 et α_2; nous aurons ainsi les deux équations

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\alpha_1}=\mathrm{C},\\ \frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\alpha_2}=\mathrm{C}.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad [a]$$

D'autre part, si nous prenons, comme Beer, l'axe de révolution pour axe des y, et si nous remarquons qu'alors, aux deux points considérés, la tangente est infinie, l'équation [2] du § 84, en y remplaçant successivement x par α_1 et par α_2, nous donnera les deux suivantes :

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1=\frac{\mathrm{C}\alpha_1^2}{2}+\mathrm{C}',\\ \alpha_2=\frac{\mathrm{C}\alpha_2^2}{2}+\mathrm{C}',\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad [b]$$

d'où, par l'élimination de C', on tire

$$\mathrm{C}=\frac{2}{\alpha_2+\alpha_1};$$

enfin, substituant cette valeur de C dans les deux équations [a], on trouve :

$$\left.\begin{aligned}\rho_1=-\alpha_1\frac{\alpha_2+\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1},\\ \rho_2=\ \ \alpha_2\frac{\alpha_2+\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad [c]$$

La valeur de ρ_1 est négative, parce que, au point minimum de la ligne méridienne de l'onduloïde, la courbure de cette ligne est concave.

De ces deux expressions on déduit la relation fort simple aussi

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1};$$

ainsi les valeurs absolues des rayons de courbure respectivement correspondants aux distances maxima et minima à l'axe, sont entre elles comme ces mêmes distances.

Appliquons les mêmes considérations au nodoïde. Si l'on regarde la constante C comme positive, ce qui revient à supposer le liquide dans la concavité de la courbe, la normale au point minimum sera évidemment négative; pour cette figure, il faudra donc, dans la première des équations [a], remplacer α_1 par $-\alpha_1$. Quant à la substitution de α_1 à x dans l'équation [2] du § 84, je dois présenter une remarque. D'après la forme et la position de la courbe, l'abscisse x est toujours positive dans l'équation dont il s'agit, et, par suite, il en sera de même de α_1, qui joue ici simplement le rôle d'abscisse; mais, dans le premier membre de cette équation, x est multiplié par la quantité $\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ dont il faut déterminer le signe au point minimum où sa valeur absolue devient l'unité; or si nous nous reportons à l'expression générale $\frac{x\sqrt{1+p^2}}{p}$ ou $\frac{x}{\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}}$ de la normale, et si nous nous rappelons qu'au point minimum la normale est négative malgré le signe essentiellement positif de x, nous en conclurons qu'en ce même point la quantité $\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ est égale à -1, et qu'ainsi, quand on remplacera x par α_1, le premier membre de l'équation deviendra $-\alpha_1$.

Il suffira donc, pour le nodoïde, de changer, dans les équations [a] et [b], α_1 en $-\alpha_1$, et conséquemment, pour avoir les valeurs de ρ_1 et de ρ_2 correspondantes à cette

figure, on n'aura qu'à faire le même changement dans les expressions [c], ce qui donnera

$$\left.\begin{aligned}\rho_1 &= \alpha_1 \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1},\\ \rho_2 &= \alpha_2 \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1};\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad [d]$$

d'où l'on déduit aussi

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1},$$

de sorte qu'ici encore les deux rayons de courbure sont entre eux comme les distances à l'axe.

Je n'ai point parlé, à propos de l'onduloïde, de la question ci-dessus relative au signe, parce que dans cette figure la normale est partout positive.

La deuxième des expressions [c] montre qu'à l'équateur des renflements de l'onduloïde, la courbure méridienne est toujours moindre que celle d'une circonférence de cercle qui aurait son centre sur l'axe, et la deuxième des expressions [d] montre que, dans le nodoïde, à l'équateur des portions convexes vers l'extérieur, la courbure méridienne est, au contraire, plus forte que celle d'une semblable circonférence.

§ 93. Avant de passer au deuxième procédé de réalisation des figures d'équilibre, présentons une remarque à l'égard du premier. Il est clair qu'on pourrait substituer à l'huile et au mélange alcoolique deux autres liquides qui ne se mêlent pas et qui sont susceptibles d'être amenés à avoir des densités égales. C'est ce qu'a fait M. Dufour[1] en 1861 : il a formé de grosses sphères

(1) *Sur la congélation de l'eau et sur la formation de la grêle.* (Bibl. univers., arch. des sc., nouvelle période, tome X, page 346).

d'eau suspendues dans un mélange de chloroforme et d'huile; le chloroforme étant plus lourd et l'huile plus légère que l'eau, on arrive sans peine à donner au mélange une densité convenable. M. D'henry, ancien préparateur de Delezenne, m'a proposé, dans une lettre en 1869, un mélange de sulfure de carbone et d'essence de térébenthine, dans lequel on immerge une masse d'eau; ou bien de l'acide sulfurique dilué, avec une masse de sulfure de carbone immergée.

Ces nouveaux systèmes de liquides offriraient, sur le mien, l'avantage d'éviter la petite action dissolvante mutuelle (§ 5) de l'huile et du liquide alcoolique; mais, d'un autre côté, ils auraient des inconvénients : les vapeurs de chloroforme et de sulfure de carbone sont dangereuses à respirer; l'acide sulfurique dilué attaquerait les petits appareils en fer, et, en outre, des gouttelettes de ce liquide corrosif pourraient être projetées sur les vêtements de l'expérimentateur; enfin je doute beaucoup qu'on obtienne, avec ces liquides, une adhérence aux pièces solides aussi parfaite qu'avec l'huile. Je pense donc que, jusqu'ici, les liquides les meilleurs pour la réalisation de mes expériences sont ceux que j'ai indiqués.

Si M. Dufour s'est servi de chloroforme, c'est que le but de ses expériences exigeait que le liquide immergé fût de l'eau: il se proposait de chercher comment se comporterait l'eau en dehors de tout contact solide et durant un refroidissement prolongé au-dessous de 0°; il a vu ainsi les sphères d'eau, quand elles étaient petites, demeurer liquides quelquefois jusqu'à —18°, et même —20°; le mélange dans lequel elles nageaient se composait d'huile d'amande douce, d'huile de pétrole, et de chloroforme. Disons, en passant, que ces expériences ont

conduit M. Dufour à une théorie, qui me paraît extrêmement probable, de la formation de la grêle.

M. D'henry, dans la lettre dont j'ai parlé plus haut, me signale une expérience qui n'est pas sans intérêt : après avoir réalisé, dans de l'acide sulfurique dilué, une grosse sphère de sulfure de carbone, il laisse tomber dans l'acide, au-dessus de cette sphère, une goutte de sulfure de carbone coloré par de l'iode; celle-ci descend à travers l'acide jusqu'à la sphère, à laquelle elle s'incorpore ; mais en même temps elle se transforme en un anneau, qui se dirige vers le centre de la sphère en restant parallèle à lui-même; à mesure qu'il avance, il s'élargit, en se fondant peu à peu dans le liquide qui l'entoure.

§ 94. Dans la même lettre encore, M. D'henry m'engage à essayer l'action d'un puissant électro-aimant sur les figures d'équilibre réalisées avec des liquides de différente nature. Les expériences connues que je vais rappeler montrent que cette action ne serait probablement pas sans influence.

Il est resté dans mes souvenirs qu'un physicien, après avoir fait en sorte qu'un grand nombre de sphérules d'huile fussent disséminées dans un mélange d'eau et d'alcool de même densité, a soumis cet ensemble à l'action d'un électro-aimant, et a constaté, dans les sphérules, certains mouvements déterminés. L'article où cette expérience est décrite a été publié, je pense, vers 1844, mais je n'ai pu le retrouver.

En 1853, Matteucci a présenté à l'Académie des sciences de Paris un Mémoire (1) dans lequel il expose les

(1) *Sur les figures d'équilibre et sur les mouvements de certaines masses liquides et gazeuses*, quatrième Mémoire, (Comptes-Rendus, tome XXXVI, page 917).

J'ignore où les trois premiers Mémoires ont été publiés, mais la

résultats d'expériences du même genre : les deux liquides d'égale densité qu'il a employés, étaient l'huile d'olive et une solution de proto-chlorure de fer dans l'alcool; l'un de ces liquides était distribué uniformément en gouttes plus ou moins grosses suspendues dans l'autre. En plaçant le vase qui les contenait entre les pôles d'un puissant électro-aimant, Matteucci a vu ces gouttes éxécuter des mouvements prononcés, et se ranger suivant des formes constantes.

§ 94 bis. Encore une remarque : notre premier procédé peut servir à réaliser sur une grande échelle les phénomènes capillaires ordinaires, c'est-à-dire ceux où la pesanteur intervient. Il suffit, pour cela, que le mélange alcoolique renferme un très-petit excès d'alcool; alors, en effet, l'huile n'est plus complétement soustraite à l'action de la pesanteur, mais ce qui reste de cette action n'a plus qu'une très-faible intensité, et se trouve ainsi, sur des masses de grandes dimensions, du même ordre que l'action des forces moléculaires.

Dans ces conditions, par exemple, lorsque la masse d'huile est entièrement libre, elle va s'aplatir plus moins sur le morceau d'étoffe qui recouvre le fond du vase, et présente alors, en grand, la même forme qu'une gouttelette de mercure d'un volume convenable déposée sur un plan solide horizontal. Dans les mêmes conditions, la masse suspendue au disque solide des expériences du § 14 s'allonge, et affecte une figure identique à celle d'une goutte d'eau suspendue à l'extrémité inférieure d'une baguette solide, etc.

manière dont l'auteur commence celui-ci me porte à croire que, dans les précédents, il ne s'agissait pas de deux liquides de même densité.

CHAPITRE III.

Deuxième procédé; démonstration. — Liquide donnant des lames d'une très-grande persistance. — Réalisation, au moyen des lames, des figures d'équilibre de révolution. — Pression exercée par une lame sphérique sur l'air qu'elle contient. — Recherche d'une limite supérieure très-petite du rayon d'activité sensible de l'attraction moléculaire.

§ 95. Démontrons, ainsi que nous l'avons annoncé à la fin du § 3, que, si l'on néglige la très-faible action de la pesenteur, les figures d'équilibre d'une lame liquide mince réalisées dans l'air sont identiquement les mêmes que celles d'une masse liquide pleine non pesante.

Si, par un point de l'une des deux surfaces d'une semblable lame, on conçoit une droite normale à cette surface, il est clair que, vu le peu d'épaisseur de la lame, la droite en question pourra être considérée comme étant également normale à l'autre surface. En outre, si, par cette normale commune on fait passer un plan, il coupera les deux surfaces suivant des courbes qui pourront, sans erreur appréciable, être regardées comme identiques. Par conséquent, aux points où la normale ci-dessus perce les deux surfaces, les courbures des deux courbes seront les mêmes; seulement, par rapport au liquide qui forme la lame, l'une de ces courbures sera convexe et l'autre concave. Si donc ρ désigne le rayon de la première, celui de la seconde sera $-\rho$; et comme ce résultat est général, il s'applique également aux courbures principales, de sorte que, si R et R′ représentent les deux rayons de courbure principaux à l'un des deux points considérés, les deux rayons de courbure

principaux à l'autre point seront $-R$ et $-R'$. D'après cela, les pressions capillaires respectivement correspondantes à ces deux points, et rapportées à l'unité de surface, sont (§ 1), pour le premier,

$$P+\frac{A}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right),$$

et, pour le second,

$$P-\frac{A}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right).$$

Or ces deux pressions étant opposées, elles donnent une résultante égale à leur différence, c'est-à-dire à

$$A\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right).$$

Maintenant, si la figure laminaire est telle que, dans toute son étendue, la résultante ci-dessus soit nulle, il est clair que l'équilibre existera. Si cette condition n'est pas remplie, les résultantes respectivement correspondantes aux différents points de la figure tendront à chasser ces points dans un sens ou dans l'autre; mais, dans ce cas encore, l'équilibre sera possible si la figure laminaire est fermée, et emprisonne ainsi un volume d'air; car alors, si elle a une forme telle que les résultantes dont il s'agit aient partout la même intensité, ces forces seront évidemment détruites par la résistance du gaz intérieur ou par celle de l'atmosphère. On exprimera donc l'équation générale de l'équilibre des figures laminaires, en établissant la condition que la résultante soit nulle ou constante; et, pour cela, comme le coefficient A est constant et fini, il suffira de poser

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=C,$$

la constante C pouvant être nulle ou finie.

Or cette équation générale étant également celle de l'équilibre des masses pleines, il en résulte que les lames prennent, comme je l'ai avancé, identiquement les mêmes figures que ces masses.

Ainsi l'on doit pouvoir former dans l'air, avec des lames liquides minces, telles que celles d'eau de savon, toutes les figures que nous avons obtenues avec des masses d'huile pleines. Comme je l'ai déjà fait remarquer (§ 3), les bulles de savon offrent, en ce qui concerne la figure sphérique, un premier exemple de cette réalisation à l'état laminaire.

Seulement l'identité entre les figures laminaires et celles de nos masses d'huile pleines n'est pas mathématiquement exacte, car, quelque légères que soient les lames, elles ne sont pas absolument dépourvues de poids ; mais l'effet de la pesanteur sur les formes qu'elles affectent, est, en général, tout à fait insensible à l'œil.

§ 96. Ici une remarque est nécessaire relativement au signe de la constante C et à l'interprétation de ce signe. D'après la manière dont je viens d'arriver à l'équation générale de l'équilibre des figures laminaires, il est clair que, dans cette équation, la quantité $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$ peut indifféremment, quant à sa valeur absolue, être rapportée à l'une ou à l'autre des deux surfaces de la lame. Si nous convenons de la rapporter à celle de ces deux surfaces qui regarde l'extérieur de la figure, alors, quand cette même quantité, ou, ce qui revient au même, la constante C, sera positive, la pression correspondante à la surface en question sera supérieure à P, c'est-à-dire à celle d'une surface plane, et la pression correspondante à l'autre surface sera moindre que celle d'un plan, et, par suite, moindre

que la première ; conséquemment la résultante, qui agit nécessairement dans le sens de la plus grande des deux forces, sera dirigée, comme celle-ci, vers l'intérieur de la figure. Avec la même convention, quand C sera négatif, la plus grande des deux pressions appartiendra à la surface qui regarde l'intérieur de la figure, d'où il suit que la résultante sera dirigée vers l'extérieur.

Donc lorsque C sera positif, la figure laminaire exercera une pression sur la masse gazeuse qu'elle emprisonne, et lorsque C sera négatif, la figure laminaire exercera une pression sur l'atmosphère ambiante ; mais ces actions seront détruites, dans le premier cas, par l'excès d'élasticité de l'air intérieur, et, dans le second, par l'excès relatif de la pression de l'air extérieur; enfin, lorsque C sera nul, la figure laminaire n'exercera d'action ni dans un sens ni dans l'autre.

§ 97. Ainsi, quand la figure laminaire est fermée, la condition de l'équilibre a toute sa généralité, C pouvant être positif, négatif ou nul ; mais si la figure n'est pas fermée, l'équilibre ne peut évidemment subsister que pour $C = 0$. De là résulte cette conséquence remarquable dont nous verrons plus loin un grand nombre d'applications, que lorsqu'une lame liquide mince a ses deux faces en contact avec l'atmosphère libre, elle représente nécessairement une surface à courbure moyenne nulle.

§ 98. Les lames qu'on obtient avec une simple solution de savon n'ont qu'une existence très-courte, à moins qu'elles ne soient enfermées dans un vase : une bulle de savon d'un décimètre de diamètre formée à l'air libre d'une chambre, se conserve rarement deux minutes ; le plus souvent elle crève après une minute, ou même après

une demi-minute. Il était donc important, pour la réalisation des figures d'équilibre, de chercher quelque liquide meilleur; or, en partant d'une idée que m'avait suggérée M. Donny, j'ai été assez heureux pour arriver, après plusieurs tentatives, à la composition d'un liquide qui fournit des lames d'une persistance remarquable : on le forme en mélangeant, dans des proportions convenables, de la glycérine et une solution de savon; je le nomme *liquide glycérique*. Je donnerai, ci-après, les détails de sa préparation; mais comme le résultat varie plus ou moins avec la qualité des substances employées, je vais indiquer auparavant le moyen que j'ai adopté pour l'essayer.

J'ai pris comme terme de comparaison la persistance d'une bulle d'un décimètre environ de diamètre déposée, à l'air libre de l'appartement, sur un anneau en fil de fer de 4 centimètres de diamètre. Cet anneau est porté par trois petits pieds, comme l'un de ceux du § 40; il a été, une fois pour toutes, légèrement oxydé par de l'acide azotique affaibli (§ 110). Quand on veut faire l'expérience, on le plonge dans le liquide pour qu'il en soit bien mouillé, on l'en retire, et on le pose par ses pieds sur une table en face de la porte; il se trouve alors occupé par une lame plane qu'on y laisse; ensuite, au moyen d'une pipe de terre commune dont on a préalablement fait tremper l'orifice dans le liquide pendant quelques minutes, on gonfle la bulle, et on la dépose sur cette lame, à la totalité de laquelle sa partie inférieure s'unit aussitôt; enfin on enlève la pipe, et la bulle demeure sur l'anneau. Cela fait, on sort de la chambre, dont on referme la porte avec précaution, et l'on observe de temps à autre la bulle à travers la serrure.

Voici pourquoi j'assigne à la bulle un diamètre déter-

miné : toutes choses égales d'ailleurs, les lames durent, en général, d'autant moins qu'elles sont plus grandes; il faut donc, quand on veut comparer entre elles les persistances de bulles provenant de divers échantillons de liquide glycérique, donner à ces bulles le même diamètre.

§ 99. Ceci admis, décrivons la préparation du liquide dont il s'agit. Disons d'abord que cette préparation doit s'effectuer en été, et à une époque où la température de la chambre ne descend pas, du moins pendant le jour, au-dessous de 20° ; par des températures notablement plus basses, on n'obtient que des résultats mauvais ou médiocres.

Le savon le plus convenable est celui de Marseille, et la glycérine qui m'a toujours paru la meilleure est celle qui se fabrique en Angleterre, et qui est connue sous le nom de glycérine de Price; on se la procure par l'intermédiaire d'un pharmacien. Je supposerai donc, dans ce qui suit, qu'on fasse usage de ces substances, et qu'on choisisse une température suffisante. Il n'est pas impossible de réussir avec d'autres savons et d'autres glycérines, mais alors les proportions doivent changer, et je ne puis plus rien énoncer de général.

Le procédé de la préparation varie suivant le but qu'on se propose. En premier lieu, si l'on tient plus à la simplicité des manipulations qu'à l'excellence du résultat, on opère de la manière suivante :

On prend du savon de Marseille acheté récemment, de sorte qu'il ait conservé toute son humidité; on le taille en très-petits fragments, et l'on en dissout, à une chaleur modérée, une partie en poids dans quarante parties d'eau distillée. Quand la solution est revenue à peu près à la température de la chambre, on la filtre à

travers un papier qui ne soit pas trop perméable, afin de l'obtenir limpide ; puis on verse dans un flacon trois volumes de cette solution et deux volumes de glycérine de Price ; on agite fortement et assez longtemps pour que le mélange soit bien intime, après quoi on laisse celui-ci en repos jusqu'au lendemain. Alors, suivant la qualité du savon de Marseille, il peut arriver que le mélange soit demeuré sensiblement limpide, ou bien qu'il se soit fortement troublé.

Dans le premier cas, on pourra faire servir immédiatement le liquide aux expériences : la persistance maxima des bulles d'essai sera d'une heure et demie environ ; mais le liquide perdra de jour en jour de ses propriétés, et, après une quinzaine, la persistance sera réduite à dix minutes.

Dans le second cas, le précipité qui altère la transparence du liquide demeure d'abord en suspension dans toute la masse, mais monte ensuite avec une extrême lenteur, et, après quelques jours, forme une couche nettement séparée à la partie supérieure du liquide ; on recueille alors la portion limpide au moyen d'un siphon qui s'amorce par un tube latéral, et la préparation est terminée. Je dois faire remarquer que lorsqu'on introduit dans le liquide la courte branche du siphon, une portion du dépôt est entraînée, et forme, autour de la surface extérieure du tube, une sorte de cône renversé ; il faut donc, avant d'amorcer le siphon, le débarrasser de cette enveloppe. Pour cela, on laisse d'abord le tout en repos pendant un quart d'heure, puis on agite un peu de droite et de gauche la branche plongée du siphon ; le cône de dépôt s'en détache par petits grumeaux qui remontent peu à peu et vont rejoindre la couche supérieure. Le liquide recueilli dans ces conditions est beaucoup meil-

leur que le précédent; on peut l'employer aux expériences aussitôt après l'opération du siphon; les bulles d'essai qu'il fournit ont une persistance maxima de trois heures; enfin il se conserve suffisamment bon pendant un an à peu près.

Tels sont les faits que j'ai observés en faisant usage des procédés simples ci-dessus; mais il est probable qu'on rencontrerait des échantillons de savon de Marseille donnant des résultats intermédiaires.

§ 100. En second lieu, si l'on consent à recourir à une manœuvre plus compliquée, mais dont le résultat est bien supérieur, voici comment il faut s'y prendre : Après avoir préparé la solution de savon comme précédemment, on en mêle intimement 15 volumes avec 11 volumes de glycérine de Price, ou, ce qui revient au même, 3 volumes avec 2, 2 volumes de cette glycérine, puis on abandonne le mélange à lui-même pendant sept jours. Dans cet intervalle, le liquide peut, suivant la qualité du savon, se troubler ou demeurer limpide, mais on ne s'en inquiète pas. Le matin du huitième jour, on plonge le flacon dans de l'eau qu'on a refroidie en y agitant des morceaux de glace de manière à en abaisser la température à 3° environ, et l'on entretient cette même température pendant six heures par des additions convenables de glace. Si le mélange de glycérine et d'eau de savon est en quantité considérable, il faut le fractionner entre plusieurs flacons, pour que sa température descende plus tôt jusqu'à celle du bain. Pendant cette action prolongée du froid, le liquide se trouble fortement. Les six heures écoulées, on le filtre à travers un papier suffisamment perméable(1), et, s'il est en grande masse,

(1) J'emploie les filtres à côtes de Prat-Dumas.

on le distribue dans plusieurs filtres placés sur des flacons séparés, et fonctionnant simultanément. Mais il faut empêcher que le liquide contenu dans les filtres ne se réchauffe, sans quoi le précipité que le froid a déterminé pourrait se redissoudre en partie; pour cela, avant de verser dans les filtres, on pose avec précaution dans chacun d'eux un petit bocal allongé plein de morceaux de glace et muni de son bouchon de verre pour lui donner plus de poids; ce bocal doit être incliné de manière à reposer par sa partie latérale contre le filtre; enfin on entoure de morceaux de glace la base de chacun des flacons qui portent les entonnoirs, puis, retirant le liquide du bain froid, on remplit immédiatement les filtres. Les premières portions de liquide qui passent sont troubles; on les reverse dans les filtres, et il suffit de répéter cette dernière opération deux ou trois fois pour que le liquide recueilli ensuite soit absolument limpide.

Je n'ai pas besoin d'ajouter que si la filtration dure assez longtemps, il faut renouveler de temps à autre la glace des petits bocaux; quant à celle que l'on a disposée autour de la base des flacons, et qui est destinée à prévenir le réchauffement des portions qui passent d'abord en entraînant du précipité, on comprend qu'elle n'est plus nécessaire dès que le liquide se montre limpide.

La filtration terminée, on abandonne encore le liquide à lui-même pendant dix jours; alors la préparation est complète.

Avec un liquide ainsi préparé, les bulles d'essai peuvent, dans les meilleures conditions, persister 18 heures, c'est-à-dire six fois autant qu'avec le second liquide du paragraphe précédent.

§ 101. Les substances qui entrent dans la composition

du liquide sont des produits de l'industrie, et sont, de plus, de nature organique; or de semblables produits varient presque toujours soit avec les époques, soit avec les fabriques d'où ils proviennent; aussi n'ai-je obtenu qu'exceptionnellement le résultat extraordinaire mentionné ci-dessus. Du reste, pour mettre les physiciens à même d'apprécier le degré de confiance que mérite le procédé dont je viens d'exposer le détail, j'ai réuni dans le tableau suivant tous les résultats qu'il m'a fournis; seulement on verra que, pour quelques uns des liquides essayés, les proportions étaient légèrement différentes.

Ces essais ont été effectués pendant quatre étés successifs, et conséquemment avec divers échantillons de glycérine de Price et de savon de Marseille; la quantité de chaque liquide préparé était de 100 à 200 grammes environ. La 3me colonne du tableau donne le nombre de volumes de glycérine pour trois volumes de solution de savon, et la 4me la proportion du savon par rapport à l'eau; la 5me contient les persistances en nombres entiers d'heures; on n'y a pas ajouté la fraction, parce qu'on n'allait en général observer la bulle que d'heure en heure. Quand la persistance était de moins d'une heure, on l'a, pour abréger, indiquée par le caractère $\bar{1}$; enfin quelques bulles ont dû être abandonnées le soir, à cause de l'heure avancée, et ont éclaté pendant la nuit, de sorte qu'on ignore le nombre total d'heures de leurs persistances; on a indiqué cette circonstance par un signe + placé au-dessus du nombre d'heures observé; ainsi $\overset{+}{7}$ signifieque la bulle a été observée pendant sept heures, mais qu'elle a persisté au delà pendant un temps inconnu.

Avant chaque essai, pour rendre le liquide aussi homo-

gène que possible, on l'agitait fortement, puis on le laissait en repos pendant dix minutes.

ANNÉES.	Nos D'ORDRE DES LIQUIDES.	VOLUMES DE GLYCÉRINE.	PROPORTION DU SAVON.	PERSISTANCES EN HEURES.
1862	1	2,0	1/40	4, 9, 4.
	2	2,0	1/40	5, 9, 11.
	3	2,0	1/35	7, $\bar{1}$, 8.
	4	2,2	1/35	10, 10.
	5	2,2	1/40	17, 16, 12, 11, 18.
1863	6	2,2	1/40	10, 12, 4, $\overset{+}{7}$, 6.
	7	2,2	1/40	10, 6.
	8	2,2	1/40	$\bar{1}$, 4, 6, 9, 7.
1864	9	2,2	1/40	2, 3, 3, 4, 5, 3, 4, 4.
	10	2,2	1/40	2, 4, 5, 3, 5.
	11	2,0	1/40	$\bar{1}$, 4, 8, 4.
	12	2,2	1/40	2, 6, $\bar{1}$, 7, 7.
	13	2,0	1/40	3, 3, 7.
	14	2,2	1/40	4, 6, 9, 1, 2.
1865	15	2,2	1/40	5, 5, 2.
	16	2,2	1/40	4, 7, 5, 5, 5, 4, 5.
	17	2,2	1/40	10, 7, 1, 8, 6, 6, 7.
	18	2,2	1/40	9, 6, 3, 5, 3, $\overset{+}{6}$, 9, 6, 7, $\bar{1}$, 4, 5.
	19	2,2	1/40	$\overset{+}{10}$, 4, 3, $\overset{+}{5}$, 9, 7, 8.

On voit que les liquides de 1862, de 1863 et de 1865 ont été en général très-bons, mais que ceux de 1864 se sont montrés inférieurs, sans être mauvais; je dois ajouter que les liquides 11, 12 et 13, surtout les deux derniers, ont présenté cette particularité que les bulles se formaient difficilement : plusieurs ont éclaté soit avant

même d'être déposées sur l'anneau, soit immédiatement après.

J'ai préparé encore, en 1864, avec un autre échantillon de glycérine, deux liquides qui ne se trouvent pas dans le tableau ; ils étaient décidément mauvais, mais j'ai certaines raisons de soupçonner une erreur dans la pesée du savon, dont la quantité aurait été deux fois trop forte ; c'est pour ce motif que je ne les ai point inscrits ; cependant l'erreur dont il s'agit ne m'est pas prouvée, et c'est là ce qui me fait admettre la possibilité d'une non-réussite, tout exceptionnelle d'ailleurs.

Enfin ce qui m'a engagé à considérer comme les proportions les plus efficaces celles que j'ai prescrites dans le § précédent, c'est que, parmi les liquides de 1862, le plus excellent, celui qui m'a donné des persistances de 17 et de 18 heures, c'est-à-dire le 5me, a été préparé dans ces mêmes proportions.

§ 102. Le liquide glycérique obtenu par le procédé du § 100 commence à se troubler légèrement après un mois environ, puis le trouble augmente insensiblement, et, en même temps, la persistance des lames que fournit le liquide diminue peu à peu. Le précipité qui se forme ainsi ne monte pas, ou ne monte qu'avec une excessive lenteur, et si l'on essaie de clarifier le liquide par filtration, le précipité passe avec lui à travers le filtre. Ce même précipité, qui résulte d'une altération graduelle du liquide sans l'intervention du froid, est probablement d'une autre nature que celui qui apparaît lors du refroidissement à 3°.

Les divers échantillons que j'ai préparés ayant été successivement absorbés par mes expériences ou réunis en une masse unique dont les parties avaient ainsi des âges très-inégaux, je ne puis dire avec certitude pendant

combien de temps un liquide obtenu par le procédé dont il s'agit se conserve suffisamment pour la réalisation des figures laminaires. J'ai pu cependant m'assurer que ce temps dépasserait de beaucoup un an : j'avais conservé par hasard une petite quantité d'un liquide assez bon, quoique préparé dans des circonstances qui n'étaient pas les plus favorables; je l'ai repris et essayé de nouveau environ deux ans et demi plus tard; il s'est laissé, sans trop de difficulté, gonfler en bulles d'un décimètre; quelques unes de celles-ci ont éclaté immédiatement, mais une dernière est demeurée sur l'anneau, et a persisté 5 heures. On peut donc croire qu'un liquide fait dans les conditions normales, se maintiendrait mieux encore.

§ 103. Le savon de Marseille consiste, on le sait, en un mélange d'oléate, de stéarate et de margarate de soude, et je me suis assuré, par quelques expériences, que c'est au premier de ces sels que la solution de savon doit la propriété de se laisser gonfler en grosses bulles. J'ai été conduit, en outre, à regarder comme probable que le précipité déterminé par le froid dans la préparation du liquide glycérique (§ 100), et dont la séparation à l'aide du filtre améliore si considérablement ce liquide, est formé de stéarate et de margarate de soude. J'ai conclu de tout cela qu'en substituant l'oléate de soude pur au savon de Marseille, on devait réaliser, par un procédé bien plus simple, un liquide supérieur même aux meilleurs liquides préparés au savon ; or c'est ce que l'expérience confirme pleinement : il m'a suffi, en effet, de dissoudre simplement, à une chaleur modérée, l'oléate de soude dans l'eau distillée, puis de mêler la glycérine à cette solution.

Dès le lendemain ou le surlendemain, les liquides

étaient propres aux expériences, et ils m'ont donné des bulles (toujours d'un décimètre et à l'air libre), dont la persistance maxima a dépassé 24 heures. Comme je pouvais le prévoir, le liquide glycérique à l'oléate de soude ne se trouble pas par le froid; en outre, j'ai de fortes raisons de croire qu'il se conserve beaucoup plus longtemps que le liquide au savon; cependant il se trouble aussi après un temps plus ou moins long.

Le liquide à l'oléate de soude est donc le véritable liquide glycérique ; il l'emporte de beaucoup sur le liquide au savon, et sa préparation est des plus faciles. Malheureusement l'oléate de soude pur ne se trouve pas dans le commerce, et il faut, pour s'en procurer, recourir à un chimiste.

Je dois les échantillons dont j'ai fait usage à l'obligeance de M. Rottier, préparateur de chimie à l'Université de Gand; il les avait obtenus par le procédé décrit dans le *Précis de chimie organique* de M. Gerhardt. Insistons, à l'égard de cette préparation, sur un point important : si l'on veut que l'oléate soit propre à la confection d'un bon liquide glycérique, il faut que le chimiste emploie, pour le précipiter et l'avoir ainsi isolé, du sel marin parfaitement purifié soit par des cristallisations successives, soit par un autre moyen; avec le sel du commerce, l'oléate recueilli donne, dissous dans l'eau, un liquide trouble qu'on ne parvient pas à clarifier suffisamment.

§ 104. J'ai employé l'oléate de soude sous deux états, savoir : 1° humide et ayant la consistance du savon de Marseille; 2° complétement desséché. J'ai eu à ma disposition deux échantillons différents d'oléate humide; tous les deux ainsi que l'oléate desséché donnaient des

solutions parfaitement limpides; celles des oléates humides se troublaient, à la vérité, après quelques heures, mais elles se clarifiaient d'elles-mêmes en deux ou trois jours par le dépôt du précipité, de sorte qu'on n'avait plus qu'à les décanter.

Les proportions d'oléate qui m'ont paru les plus efficaces sont, pour l'oléate humide, une partie en poids dissoute dans cinquante parties d'eau distillée, et, pour l'oléate sec, une partie en poids dans soixante parties d'eau distillée; quant à la glycérine, j'ai obtenu d'excellents résultats en la mêlant à la solution du second oléate humide, et à celle de l'oléate sec, dans la même proportion que pour les liquides au savon, c'est-à-dire 2,2 volumes de glycérine pour 3 de solution d'oléate; mais, avec le premier oléate humide, j'ai dû renforcer un peu la quantité de glycérine. Comme on le verra par le tableau ci-après, ce même oléate m'a donné aussi de très-grandes persistances avec des proportions assez différentes, savoir la solution faite à $\frac{1}{40}$ et une quantité plus forte encore de glycérine.

Je dois présenter une remarque à l'égard de l'oléate sec : celui qui a servi pour les liquides ci-dessus avait subi la dessiccation en masse. M. Rottier en a desséché une autre portion à l'état de poudre grossière, et celle-ci s'est montrée beaucoup moins bonne; il paraît, d'après cela, que la dessiccation altère l'oléate superficiellement; cette altération a peu d'influence quand la substance est en gros morceaux, parce qu'alors la surface est petite relativement au volume, mais elle produit une détérioration considérable quand cette même substance est à l'état de grande division.

Voici maintenant le tableau des résultats; il est disposé comme celui du § 101, et ne contient que les

résultats correspondants à de bonnes proportions; tous ont été obtenus dans l'été de 1863.

ÉTAT DE L'OLÉATE.	Nos D'ORDRE DES LIQUIDES.	VOLUMES DE GLYCÉRINE.	PROPORTION DE L'OLÉATE.	PERSISTANCES EN HEURES.
Humide . . .	1	2,4	1/50	$\overset{+}{14}$,23, 3,$\overset{+}{5}$, 8.
Id.	2	2,7	1/40	$\overset{+}{13}$,22,12,9, 7, 10, 6,12,7.
Id.	3	2,6	1/50	3, 7,12,5,23,20, $\overset{+}{12}$.
Id.	4	2,4	1/50	$\overset{+}{12}$, $\overset{+}{13}$.
Sec.	5	2,2	1/60	19,23,10.
Id.	6	2,2	1/60	23,17,10,13.
Humide. . . .	7	2,2	1/50	24, 3,$\overset{+}{10}$, 4,17,4.

Bien que ces liquides m'aient donné, on le voit, de très-grandes persistances, je suis convaincu qu'il est possible d'aller beaucoup plus loin encore. En effet, on peut remarquer que les persistances d'un même liquide sont en général fort inégales, ce qui me porte à croire que mes essais relatifs aux proportions n'ont pas été assez nombreux, et que, pour plusieurs des liquides, celles indiquées dans le tableau ne sont pas les meilleures.

§ 105. Je crois devoir insister sur la grande importance des proportions, tant pour le liquide au savon que pour le liquide à l'oléate de soude; les expériences qui m'ont conduit à celles que j'ai indiquées, me donnent la certitude que si l'on effectuait au hasard la solution de savon ou d'oléate et son mélange avec la glycérine, on pourrait avoir un liquide peu supérieur ou même inférieur à la simple eau de savon. Par exemple, j'ai préparé, à la fin de l'été de 1865, dans de bonnes con-

ditions de température, un liquide au savon où la solution était, comme pour les autres, à $\frac{1}{40}$, mais où il n'y avait que 1,8 volume de glycérine pour 3 volumes de cette solution; or, sur sept bulles de ce liquide, une seule a atteint une heure de durée, et, pour plusieurs des autres, la persistance n'a pas même été d'une demi-heure.

§ 106. On sait que les bulles de savon persistent beaucoup plus longtemps en vase clos qu'à l'air libre ; or il en est de même des bulles de liquide glycérique ; seulement, pour que l'expérience ait une complète réussite à l'égard de ces dernières, il faut que le vase dans lequel on enferme la bulle ait des dimensions considérables relativement au volume de celle-ci.

J'ai employé comme vase une cage cubique en verre de 30 centimètres de côté; le liquide était formé du mélange des nos 17 et 18 du tableau du § 101 ; il a donné à l'air libre, les persistances 5, 3, 4, 5, 9, $\bar{1}$, 5 et 6 heures, et, dans la cage de verre, 33, 15, 27 et 21 heures.

On augmente encore beaucoup la persistance en plaçant dans le vase clos une substance qui absorbe l'humidité de l'air : après avoir obtenu les résultats ci-dessus, j'ai recommencé les expériences en déposant préalablement des fragments de chlorure de calcium sur le fond de la cage; mais il fallait éviter la grande quantité de vapeur aqueuse que chasse dans l'intérieur de la bulle l'insufflation au moyen de la bouche; pour cela, on a adapté le tuyau de la pipe à une balle creuse en caoutchouc, puis, après avoir comprimé celle-ci pour en expulser l'air, on a introduit la tête de la pipe dans un bocal contenant une certaine quantité de chlorure de calcium, et on a laissé la balle se regonfler par son élasticité, en aspirant ainsi l'air à peu près sec de ce

bocal; cela fait, on s'est servi de cet instrument pour former la bulle; celle-ci a persisté $\overset{+}{37}$ heures.

J'ai soumis ensuite aux mêmes expériences un liquide préparé à l'oléate de soude, mais avec un oléate qui n'était pas très-bon (1); il a donné, à l'air libre, les persistances 10, 10, 12, $\overset{+}{10}$ et $\overset{+}{8}$ heures, et pouvait conséquemment être assimilé aux meilleurs liquides préparés au savon. Dans la cage de verre, sans chlorure de calcium, une première bulle a duré $\overset{+}{10}$, une autre 24, et une dernière 41 heures; avec l'emploi du chlorure de calcium, la persistance a été de $\overset{+}{54}$ heures.

Je dois dire ici que la cage de verre avait son ouverture tournée en bas, et se posait simplement sur une tablette, de sorte que, pour gonfler la bulle, il fallait d'abord enlever la cage, et qu'ainsi, pendant l'opération, la bulle se trouvait exposée à l'air libre de la chambre; en outre, la quantité de chlorure de calcium était insuffisante pour couvrir tout le sol de la cage; enfin le bord de celle-ci ne joignait qu'imparfaitement à la tablette en certains endroits. Il suit de là que l'air dans lequel la bulle demeurait plongée n'était pas bien desséché; mais, en essayant de produire un dessèchement plus complet, je n'ai obtenu que des persistances moindres; il en a été de même quand, pour gonfler la bulle avec de l'air parfaitement sec, j'ai interposé, entre le tuyau de la pipe et la balle de caoutchouc, un tube de verre plein de fragments de chlorure de calcium.

Il paraît donc que, pour atteindre les plus grandes persistances, il ne faut dessécher que jusqu'à un certain point l'atmosphère du vase clos et l'air qui gonfle la bulle. Nous verrons plus loin (§ 303) que la nécessité d'un vase

(1) C'est pour cette raison qu'il n'est pas inscrit dans le tableau du § 104.

de grandes dimensions et d'un dessèchement imparfait de l'air s'explique complétement.

§ 107. J'ai dit (§ 99) qu'avec d'autres savons et des glycérines d'autres provenances, il n'était pas impossible de se procurer un bon liquide, mais qu'alors les proportions devaient être modifiées; en voici des exemples :

En premier lieu, en employant le savon de Marseille et une glycérine française qui m'avait été vendue dans un flacon portant les noms *Lamoureux et Gendrot*, le liquide, préparé dans les proportions qu'exige la glycérine de Price, n'a donné que des persistances d'un quart-d'heure; mais j'ai essayé ensuite des proportions différentes, et j'ai réussi en prenant une partie de savon dissoute dans 30 parties d'eau distillée, et des volumes égaux de glycérine et de cette solution; les persistances ont été : 2, 4, $\overset{+}{6}$, 9 et 8 heures.

En second lieu, j'ai réussi également avec le savon de Windsor et la glycérine de Price; mais je dois dire que ce savon, comme la plupart des autres savons de toilette, présente un grave inconvénient : quand on l'a dissous dans l'eau distillée, la solution se prend, par le refroidissement, en une masse gélatineuse. Je suis cependant parvenu, après beaucoup de tâtonnements, à le faire servir à la préparation; mais le procédé est trop compliqué pour que je l'indique ici, et je ne mentionne l'emploi de ce savon que pour montrer la possibilité d'obtenir un bon liquide avec des savons autres que celui de Marseille.

Voici, en outre, une préparation recommandée comme facile par M. Böttger[1]; je traduis la partie essentielle de l'article :

(1) *Leichte Anfertigung einer Flüssigkeit zur Erzeugung der Plateau'schen Gleichgewichtsfiguren ohne Schwere* (Jahres-Bericht des physikalischen Vereins zu Frankfurt am Main, 1868-1869, p. 10).

« On introduit, dans un grand flacon renfermant de l'eau distillée froide, du savon d'huile de palme taillé en très-petits fragments, on secoue fortement, et l'on se procure ainsi une solution aussi saturée que possible ; on la filtre à travers du papier suffisamment perméable, et l'on y mêle un tiers environ de son volume de glycérine chimiquement pure et concentrée. . . . .

. . . .

Des bulles d'un pied, et au delà, de diamètre, convenablement soustraites aux agitations de l'air et aux ébranlements, persistent souvent 5 à 10 minutes, mais des bulles de 1 à 3 pouces (26^{mm} à 78^{mm}) durent des heures entières et même fréquemment 10 à 20 heures. »

J'ignore s'il est plus aisé de se procurer du savon d'huile de palme que de l'oléate de soude pur ; mais, à coup sûr, il doit être fort difficile d'avoir de la glycérine chimiquement pure. On voit, du reste, que le liquide de M. Böttger est inférieur au liquide à l'oléate de soude (§ 104).

J'ajouterai ici que j'ai essayé inutilement de préparer un liquide convenable en employant des glycérines allemandes du commerce ; peut-être n'ai-je pas varié suffisamment les proportions. J'insiste donc encore pour que les personnes qui voudront préparer mon liquide, se servent de glycérine de Price.

§ 108. Les bulles de liquide glycérique manifestent toujours, quand elles persistent assez longtemps, deux phénomènes bien remarquables :

En premier lieu, la lame qui constitue une semblable bulle, prend, après une heure ou deux, une épaisseur sensiblement égale dans toute son étendue, sauf, bien entendu, la petite portion inférieure interceptée par l'anneau métallique. On le reconnaît à la disposition des

teintes : en effet, quand on observe une de ces bulles en tenant l'œil à la hauteur du centre, on voit, au milieu de sa surface, un large espace circulaire d'une couleur uniforme, et, autour de celui-ci, un ou deux anneaux concentriques dont chacun présente une autre couleur. La teinte de l'espace central est évidemment celle de la lame sous l'incidence normale et sous les incidences voisines; quant aux teintes des anneaux, elles résultent de l'obliquité plus forte des rayons visuels. Je dois ajouter que souvent le haut de l'anneau coloré extérieur offre, sur une certaine étendue, une nuance un peu différente du reste, et qui indique, au sommet de la bulle, une ténuité tant soit peu plus grande de la lame.

En second lieu, les teintes dont il s'agit montent d'abord lentement vers les premiers ordres, puis redescendent, lentement aussi, jusqu'au rouge et au vert des derniers, et même quelquefois presque jusqu'au blanc; d'où résulte cette conséquence singulière que l'épaisseur de la lame, après avoir diminué jusqu'à un certain point, va ensuite en augmentant.

§ 109. L'uniformité d'épaisseur à laquelle parvient la lame peut, me semble-t-il, s'expliquer de la manière suivante : lorsque notre bulle est déposée sur l'anneau solide, l'amincissement graduel de la lame doit marcher avec une lenteur croissante, car, toutes choses égales d'ailleurs, plus cette lame est mince, moins les portions de liquide qui descendent incessamment vers l'anneau métallique ont de masse, et conséquemment plus leur mouvement doit être entravé par la résistance que la viscosité lui oppose ; or, par la même raison évidemment, si la lame présente une épaisseur inégale, la descente du liquide sera moins lente dans les portions plus épaisses, d'où il suit que la lame tendra vers une minceur uniforme.

Il est inutile de rappeler que je fais toujours abstraction de la petite calotte interceptée par l'anneau solide, calotte que cet anneau rend indépendante du reste.

A la vérité, dans les premiers temps de l'existence de la bulle, l'épaisseur est d'autant plus grande que l'on considère des points plus voisins de l'anneau solide, et comme, à mesure qu'on se rapproche de celui-ci, l'inclinaison de la lame est de plus en plus forte, la pesanteur agit par une composante de plus en plus faible ; mais il suffit d'admettre que l'influence de l'augmentation de masse l'emporte sur celle de l'amoindrissement de la composante en question.

Pour rendre l'explication complète, il faut encore donner la raison de la circonstance mentionnée ci-dessus, que l'épaisseur est d'abord plus grande dans le bas de la bulle ; or on comprend que, tant que la lame a partout une épaisseur assez notable, l'influence des différences de masse se fait moins sentir, et qu'ainsi le liquide qui descend vers la moitié inférieure de la bulle peut, pendant quelque temps, y demeurer plus ou moins accumulé. C'est ce que vient appuyer l'expérience suivante : on réalise une lame plane dans un anneau en fil de fer de 7 centimètres de diamètre, par exemple, ce qui se fait en plongeant horizontalement cet anneau dans le liquide et le retirant de la même manière. Si l'anneau est maintenu ensuite dans une position horizontale, la lame plane en question se montre incolore, du moins pendant un certain temps ; mais si, dès qu'elle est formée, on incline l'anneau et qu'on le maintienne ainsi, elle se partage bientôt en bandes horizontales nombreuses et colorées, dont les teintes indiquent un accroissement d'épaisseur de la partie la plus haute jusqu'à la partie la plus basse. Ces lames n'ont jamais une très-grande persistance, sans quoi elles

arriveraient probablement peu à peu à une teinte uniforme. On verra, du reste, plus loin que, dans des circonstances convenables, une lame plane et inclinée finit par devenir entièrement noire.

Quant à la rétrogradation des teintes, elle provient de ce que le liquide glycérique absorbe l'humidité de l'air ambiant; en effet, quand la bulle est formée en vase clos, si l'on a fait en sorte, en mouillant d'eau les parois intérieures de ce vase, que la bulle soit entourée d'une atmosphère très-humide, les teintes ne sortent pas du rouge et du vert des derniers ordres ; et si, au contraire, on a déposé au fond du vase une substance absorbante, les teintes montent sans rétrograder. C'est que, dans une atmosphère très-humide, l'absorption de l'eau par la lame répare continuellement la diminution d'épaisseur due à la descente du liquide, tandis que, dans une atmosphère desséchée, cette réparation ne peut avoir lieu. Enfin, à l'air libre, il faut admettre que l'effet de la descente du liquide l'emporte d'abord sur celui de l'absorption, et qu'ensuite c'est l'inverse qui se produit. J'aurai à revenir sur ce phénomène, et je l'expliquerai alors plus nettement.

§ 110. Maintenant que nous sommes en possession d'un liquide qui se laisse développer en lames très-durables, faisons servir ces lames à la réalisation des figures d'équilibre de révolution. Les appareils nécessaires sont les suivants : 1° un système d'anneaux en fil de fer de 7 centimètres de diamètre, pareil à celui du § 40; seulement les pieds de l'anneau inférieur sont fixés sur une plaque solide, afin que l'ensemble ait un certain poids. 2° Un second système semblable, mais dont les anneaux n'ont que 3 centimètres de diamètre. 3° Le système de disques de 7 centimètres du § 63. 4° Une tablette à vis

calantes. 5° Un support consistant en une tige verticale le long de laquelle glisse, à frottement doux, un bras horizontal; c'est à l'extrémité de celui-ci que l'on fixe soit l'un des anneaux supérieurs par le bout de la queue de sa fourche, soit le disque supérieur par le bout du fil de fer qui le soutient; j'ai pris, pour ce support, un cathétomètre; l'anneau ou le disque s'attachait, à l'aide d'une pièce intermédiaire, à l'extrémité de la lunette; on avait ainsi, outre les autres conditions, la faculté de lire, sur la graduation de l'instrument, la quantité dont on élevait ou dont on abaissait l'anneau ou le disque.

Quand les anneaux et les disques sont neufs, le liquide glycérique y adhère mal, et les figures laminaires crèvent pendant qu'on essaie de les former, ou presque immédiatement après leur formation; mais on écarte cette difficulté de la manière suivante : on plonge les appareils dont il s'agit dans de l'acide azotique étendu de quatre fois son volume d'eau, on les y maintient jusqu'à ce que leur surface soit notablement oxydée, ce qui n'exige que deux minutes environ, puis on les lave soigneusement dans de l'eau pure, on les essuie en y promenant une bande de papier à filtre, et on les laisse sécher; ils sont alors rendus propres à servir indéfiniment, et donnent toujours des figures bien persistantes.

Voici maintenant comment on prépare les expériences. On rend d'abord le cathétomètre bien vertical, et l'on y adapte l'anneau ou le disque supérieur; si cet anneau ou ce disque ne paraît pas tout à fait horizontal, on en corrige la position en courbant légèrement avec une pince le fil de fer qui le soutient. On place ensuite sur la tablette à vis la pièce inférieure, anneau ou disque, de manière qu'elle soit à peu près verticalement sous l'autre, puis, au moyen des vis calantes et par de petits déplacements

de la pièce inférieure, on parvient sans peine à faire en sorte qu'en descendant la supérieure, les deux anneaux ou les deux disques se recouvrent exactement. Alors, après avoir remonté le supérieur, on mouille soigneusement chacun d'eux avec du liquide glycérique. Pour l'anneau inférieur on se sert, à cet effet, d'un pinceau bien imbibé, et, pour le supérieur, on soulève jusqu'à lui une capsule contenant du même liquide, dans lequel on le fait plonger. Après qu'on a retiré la capsule, l'anneau se trouve occupé par une lame plane, mais on la crève. Quant aux disques, on étend le liquide avec le pinceau sur la totalité des deux faces en regard, puis on amène en contact avec la face mouillée du disque supérieur le liquide contenu dans la capsule, enfin on enlève celle-ci.

§ 111. Supposons actuellement qu'il s'agisse de réaliser le caténoïde. On prend le système d'anneaux de 7 centimètres, et, après avoir disposé les choses comme je viens de l'indiquer, on abaisse l'anneau supérieur jusqu'à ce qu'il ne soit plus séparé de l'autre que d'une fraction de millimètre ; puis on promène à plusieurs reprises le pinceau bien trempé de liquide glycérique tout le long de l'ensemble des deux anneaux, afin de remplir le petit espace laissé entre eux. On élève alors l'anneau supérieur, et l'on voit un caténoïde laminaire s'étendre de l'un à l'autre. Je rappellerai ici qu'entre deux anneaux égaux dont l'écartement est moindre que l'écartement limite, il y a (§§ 58 et 80) deux caténoïdes possibles inégalement rentrés, et que lorsqu'on réalise, avec de l'huile au sein du liquide alcoolique, un caténoïde plein, c'est toujours (§ 60) le moins rentré qui se produit, d'où j'ai conclu que le plus rentré est instable ; or, comme on devait s'y attendre, le caténoïde laminaire de notre expérience est toujours aussi le moins rentré.

En continuant à faire monter graduellement l'anneau, on atteint bientôt un point où l'équilibre cesse: on voit le caténoïde se resserrer rapidement en son milieu, et se convertir en deux lames planes occupant respectivement les deux anneaux. La lecture au cathétomètre donne alors, pour l'intervalle des deux anneaux, environ 46 millimètres, c'est-à-dire à fort peu près les deux tiers du diamètre des anneaux, ou la hauteur du caténoïde limite (§ 80).

C'est que la figure étant ouverte, et conséquemment formée d'une lame en contact par ses deux faces avec l'atmosphère libre, elle doit nécessairement (§ 97) représenter une surface à courbure moyenne nulle, ou, en d'autres termes, l'une de celles que les géomètres ont appelées surfaces à aire minima ; or, d'après la démonstration de Goldschmidt (§ 80), au delà de l'écartement limite, il n'y a plus d'autre surface de révolution à aire minima pouvant s'appuyer sur les deux anneaux, que l'ensemble de deux plans occupant respectivement ces derniers. Remarquons, en passant, que les lames qui, après la transformation, remplissent les deux anneaux, offrent un exemple de la réalisation laminaire du plan.

J'ai déjà appelé (§ 60) l'attention sur le fait qu'un caténoïde limite plein, formé avec de l'huile dans le liquide alcoolique, loin de s'altérer spontanément, est, au contraire, très-stable ; je ferai voir, en son lieu (§ 387), à quoi tient cette différence entre la figure pleine et la figure laminaire.

§ 112. Pour réaliser le cylindre avec les mêmes anneaux de 7 centimètres, on procède comme suit : après avoir monté l'anneau supérieur à une hauteur suffisante, on gonfle une bulle de 10 centimètres environ de diamètre, et on la dépose sur l'anneau inférieur,

auquel elle adhère immédiatement; puis on abaisse l'anneau supérieur jusqu'à ce qu'il vienne toucher la bulle, qui s'attache également à tout son contour; il est inutile de rappeler que les deux anneaux doivent avoir été préalablement mouillés de liquide glycérique (§ 110); enfin on remonte graduellement l'anneau supérieur, et la bulle qui, ainsi verticalement étirée, perd de plus en plus sa courbure méridienne latérale, se convertit, pour un certain écartement des anneaux, en un cylindre parfaitement régulier, présentant des bases convexes comme les cylindres d'huile pleins.

On peut donner à la bulle un diamètre un peu plus grand; mais quand il est trop considérable, on n'arrive plus à la forme cylindrique, soit parce que le cylindre que l'on voudrait obtenir dépasse sa limite de stabilité, soit parce que, s'il est encore en deçà de cette limite, il commence à en approcher : dans ce dernier cas, en effet, les forces figuratrices devenant très-peu intenses, le faible poids de la lame exerce une influence sensible, et la figure se montre plus ou moins renflée dans sa moitié inférieure et étranglée dans sa moitié supérieure. Le cylindre le plus élevé que l'on puisse réaliser d'une manière régulière avec les anneaux indiqués, a une hauteur de 17 centimètres environ, et l'on voit qu'il est en deçà de la limite de la stabilité, puisque celle-ci correspond à une hauteur un peu plus grande que le triple du diamètre (§ 46).

§ 113. Veut-on obtenir un onduloïde partiel étranglé en son milieu (§ 55)? On dépose sur l'anneau inférieur une bulle n'ayant qu'environ 9 centimètres de diamètre, on la saisit, comme précédemment, avec l'anneau supérieur, puis on remonte de même ce dernier, mais on va au delà du point où la figure devient cylindrique; cette

figure s'étrangle alors en son milieu, d'autant plus profondément qu'on élève davantage l'anneau, et constitue ainsi l'onduloïde cherché. Celui-ci se montre, comme le cylindre, parfaitement régulier, et ses bases sont également des calottes sphériques convexes.

En élevant toujours l'anneau supérieur, on atteint un point où l'équilibre ne peut plus exister, et alors la figure se resserre rapidement en son milieu, où elle se désunit pour se transformer en deux bulles sphériques respectivement attachées aux deux anneaux.

Si c'est un onduloïde partiel renflé en son milieu (§§ 47, 52 et 54) que l'on se propose de réaliser, on fait usage du système d'anneaux de 3 centimètres. On forme une bulle d'environ 8 centimètres de diamètre, et, après l'avoir déposée sur l'anneau inférieur, puis l'avoir saisie avec l'anneau supérieur, on élève ce dernier; la bulle passe ainsi par degrés à une figure composée d'un renflement entre deux portions d'étranglements et ayant encore pour bases des calottes sphériques convexes; c'est conséquemment l'onduloïde en question.

Dans cette expérience, il faut s'arrêter à un degré d'écartement des anneaux pour lequel les tangentes aux points extrêmes de la ligne méridienne sont encore notablement inclinées sur l'axe, et, avec cette condition, la figure paraît régulière comme les précédentes. Si l'on va jusqu'à approcher du point où ces tangentes seraient verticales, la figure avoisine sa limite de stabilité (§ 52), et, comme à l'égard du cylindre, la diminution des forces figuratrices laisse au poids de la lame une action sensible; le renflement se montre alors un peu plus bas que le milieu de la hauteur de la figure.

§ 114. Enfin la réalisation du nodoïde exige l'emploi du système de disques. On commence par gonfler une

bulle de 3 à 4 centimètres de diamètre, on l'amène en contact avec la face mouillée du disque inférieur, à laquelle elle adhère aussitôt en s'étalant plus ou moins, et l'on continue à la gonfler jusqu'à ce quelle fasse partie d'une sphère d'environ 10 centimètres de diamètre, puis on enlève la pipe; la lame part alors du bord même du disque. On abaisse ensuite le disque supérieur jusqu'à ce qu'il vienne toucher le sommet de la bulle; celle-ci s'ouvre immédiatement en cet endroit, et la lame gagnant également le bord du dernier disque, forme, d'un bord à l'autre, une portion de renflement d'onduloïde. Les choses étant en cet état, on continue à descendre le disque supérieur, et, quand on a dépassé le point où la figure constituerait une zone sphérique, on a le nodoïde partiel cherché (§ 71).

Si l'on descend encore le disque, on atteint, absolument comme avec le nodoïde d'huile plein, un point au delà duquel la figure cesse d'être de révolution, et se porte latéralement d'autant plus que le disque s'abaisse davantage.

§ 115. Toutes ces expériences sont fort curieuses; il y a un charme particulier à contempler ces légères figures presque réduites à des surfaces mathématiques, qui se montrent parées des plus brillantes couleurs, et qui, malgré leur extrême fragilité, persistent pendant si longtemps.

Ces mêmes expériences s'exécutent promptement et de la manière la plus commode. On n'a plus ici les embarras qui, dans les expériences avec les masses d'huile pleines, résultent de l'égalisation des deux densités, des variations de la température, et de la petite action mutuelle des deux liquides. Seulement il y a certaines expériences qui exigent impérieusement l'emploi de l'huile

et du liquide alcoolique : telle est, par exemple, la réalisation de la figure engendrée par un nœud entier de la ligne méridienne du nodoïde (§ 67).

Lorsqu'on a terminé une série d'expériences avec le liquide glycérique, on lave les anneaux ou les disques en les agitant dans de l'eau de pluie, puis, pour les sécher, on dépose les premiers sur du papier à filtre, et on essuie les seconds.

Indiquons encore une précaution utile : quand on effectue un grand nombre d'expériences de suite, il est bon de remouiller de temps à autre de liquide glycérique l'anneau supérieur.

§ 116. Avant de passer aux figures d'équilibre qui ne sont pas de révolution, nous allons nous occuper de deux questions ayant trait aux sphères laminaires.

La surface extérieure d'une semblable sphère ayant tous ses rayons de courbure égaux et positifs, la lame presse (§ 96) sur l'air qu'elle emprisonne. Or la pression correspondante à un point d'une figure laminaire a, comme nous l'avons vu (§ 95), pour expression :

$$A\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right);$$

mais, dans le cas de la figure sphérique, on a $R = R' =$ le rayon de la sphère; si donc nous désignons par d le diamètre de la bulle, la valeur de la pression deviendra simplement $\frac{4A}{d}$, en négligeant, bien entendu, la petite épaisseur de la lame; d'où il suit que l'intensité de la pression exercée par une bulle sphérique laminaire sur l'air qu'elle emprisonne, est en raison inverse du diamètre de la bulle.

Le fait de cette pression est connu depuis longtemps,

et, dès 1844, M. Henry, dans une communication verbale faite à la Société Américaine[1] *Sur la cohésion des liquides*, avait déduit, de considérations autres que les précédentes, la loi que nous venons d'énoncer.

Maintenant, reprenons encore l'expression générale de la pression correspondante à un point quelconque d'une surface liquide, savoir :

$$P + \frac{A}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Pour une surface de courbure sphérique convexe, si l'on désigne par d le diamètre de la sphère à laquelle appartient cette surface, l'expression ci-dessus devient :

$$P + \frac{2A}{d},$$

et, pour une surface sphérique de courbure concave appartenant à une sphère du même diamètre, on aura :

$$P - \frac{2A}{d}.$$

Ainsi, dans le cas de la surface convexe, la pression totale est la somme de deux forces agissant dans le même sens, forces dont l'une désignée par P est la pression qu'exercerait une surface plane, et dont l'autre représentée par $\frac{2A}{d}$ est l'action qui dépend de la courbure. Au contraire, dans le cas de la surface concave, la pression totale est la différence entre deux forces agissant en sens opposés, et qui sont encore l'une l'action P d'une surface plane, et l'autre $\frac{2A}{d}$ qui dépend de la courbure. On voit

(1) *Philos. Magaz.*, 1845, vol. XXVI, page 541.

par là que la quantité $\frac{4A}{d}$ qui représente, comme nous l'avons montré ci-dessus, la pression exercée par une lame sphérique sur l'air qu'elle emprisonne, est égale au double de l'action qui provient de la courbure de l'une ou de l'autre surface de la lame.

Maintenant, lorsqu'un liquide s'élève dans un tube capillaire et que le diamètre de celui-ci est suffisamment petit, on sait que la surface qui termine la colonne soulevée ne diffère pas sensiblement d'une demi-sphère concave, dont le diamètre est par conséquent égal à celui du tube. Rappelons, en outre, une partie des raisonnements par lesquels on arrive, dans la théorie de l'action capillaire, à la loi qui lie la hauteur de la colonne soulevée au diamètre du tube. Supposons un canal excessivement délié partant du point le plus bas de la surface hémisphérique dont il s'agit, descendant verticalement jusqu'au-dessous de l'orifice inférieur du tube, se recourbant ensuite horizontalement, et enfin se relevant pour aboutir verticalement à un point de la surface plane du liquide extérieur au tube ; les pressions correspondantes aux deux orifices de ce petit canal seront, d'une part, P, et, de l'autre, $P - \frac{2A}{\delta}$, en désignant par δ le diamètre de la demi-sphère concave, ou, ce qui revient au même, celui du tube. Or les deux forces P se détruisant mutuellement, il ne reste que la force $-\frac{2A}{\delta}$, qui ayant un signe contraire à celui de P, agit conséquemment de bas en haut au point inférieur de l'hémisphère concave, et c'est elle qui soutient le poids du filet moléculaire contenu dans la première branche du petit canal entre ce

même point et un point situé à la hauteur du niveau extérieur.

Cela posé, remarquons que la quantité $\frac{2A}{\delta}$ est l'action qui provient de la courbure de la surface concave. Le double de cette quantité, ou $\frac{4A}{\delta}$, exprimera donc la pression qu'exercerait sur l'air contenu une sphère laminaire ou bulle creuse du diamètre δ et formée du même liquide. Il résulte de là que cette pression constitue une force capable de soutenir le liquide à une hauteur double de celle à laquelle il s'élève dans le tube capillaire, et que, par conséquent, elle ferait équilibre à la pression d'une colonne du même liquide ayant cette hauteur double. Supposons, pour fixer les idées, δ égal à un millimètre, et désignons par h la hauteur à laquelle le liquide s'arrête dans un tube de ce diamètre; nous aurons ce nouveau résultat, que la pression exercée, sur l'air contenu, par une bulle creuse formée d'un liquide donné et ayant 1^{mm} de diamètre, ferait équilibre à celle qu'exercerait une colonne de ce liquide d'une hauteur égale à $2h$.

Mais, la pression exercée par une bulle étant en raison inverse du diamètre de celle-ci, il s'ensuit que la colonne liquide qui ferait équilibre à la pression exercée par une bulle d'un diamètre quelconque d, aura une hauteur égale à $\frac{2h}{d}$.

Il semble d'abord que cette dernière expression devrait s'appliquer également bien aux liquides qui s'abaissent dans les tubes capillaires, h désignant alors cet abaissement, toujours dans un tube de 1^{mm} de diamètre; mais il n'en est pas tout à fait ainsi, car cela exigerait, comme on le voit aisément par la nature des raisonnements qui

précèdent, que la surface qui termine la colonne déprimée dans le tube capillaire fût sensiblement un hémisphère convexe; or on sait que, dans le cas du mercure, cette surface est moins courbe : d'après les observations de M. Bède(1), sa hauteur n'est qu'environ la moitié du rayon du tube; d'où il suit que l'évaluation de la pression donnée par notre formule serait trop petite à l'égard de semblables liquides. On pourra, du reste, la considérer comme une première approximation.

§ 117. Prenons pour mesure de la pression exercée par une bulle, la hauteur de la colonne d'eau à laquelle elle ferait équilibre. Alors, si ρ désigne la densité du liquide dont est formée la bulle, celle de l'eau étant 1, les hauteurs des colonnes d'eau et du liquide dont il s'agit qui feraient équilibre à la même pression seront entre elles dans le rapport inverse des densités, et conséquemment, si la hauteur de la seconde est $\frac{2h}{d}$, celle de la première sera $\frac{2h\rho}{d}$. Ainsi en désignant par p la pression exercée par une sphère laminaire sur l'air qu'elle emprisonne, nous obtenons en définitive :

$$p=\frac{2h\rho}{d},$$

ρ étant, comme nous l'avons vu, la densité du liquide qui constitue la lame; h la hauteur à laquelle ce liquide s'élève dans un tube capillaire de 1^{mm} de diamètre, et d le diamètre de la bulle.

Si, par exemple, la bulle est formée d'eau pure, on a $\rho = 1$, et, d'après les mesures prises par les physiciens, on a, à fort peu près, $h=30^{mm}$; la formule ci-dessus don-

(1) *Mémoires de l'Acad. de Belgique*, tome XXV des *Mémoires couronnés et des Mémoires des savants étrangers.*

nera donc, dans ce cas, $p = \frac{60}{d}$. Si l'on pouvait former une bulle d'eau pure d'un décimètre, ou 100^{mm}, de diamètre, la pression qu'elle exercerait serait conséquemment égale à $0^{mm},6$, ou, en d'autres termes, ferait équilibre à la pression d'une colonne d'eau de $0^{mm},6$ de hauteur; la pression qu'exercerait une bulle du même liquide d'un centimètre, ou 10^{mm}, de diamètre, ferait équilibre à celle d'une colonne d'eau de 6^{mm}.

Pour le mercure, on a $\rho = 13,59$, et, d'après le mémoire de M. Bède, à peu près $h = 10^{mm}$; la formule donnerait donc, pour une bulle de mercure, $p = \frac{271,8}{d}$; mais, d'après la remarque qui termine le paragraphe précédent, cette valeur est trop faible, et ne peut être regardée que comme une première approximation. Elle nous apprend qu'à égalité de diamètre, la pression d'une bulle de mercure surpasserait quatre fois et demie celle d'une bulle d'eau pure.

Pour l'éther sulfurique, on a $\rho = 0,715$, et l'on conclut des mesures prises par Frankenheim(1) à très-peu près $h = 10^{mm},2$; d'où résulte $p = \frac{14,6}{d}$, et l'on voit qu'à égalité de diamètre, la pression d'une bulle d'éther sulfurique ne serait que le quart de celle d'une bulle d'eau pure.

§ 118. Déjà en 1830, un savant américain, le Dr Hough, avait essayé d'arriver à la mesure de la pression exercée soit sur une bulle d'air contenue dans un liquide indéfini, soit sur l'air renfermé dans une bulle de savon(2). Il se fait une idée assez juste de la cause de

(1) *Die Lehre von der Cohäsion.* Breslau, 1835.

(2) *Inquiries into the principles of liquid attraction.* (Journ. de Silliman, 1re série, vol. XVII, page 86).

ces pressions, que, du reste, il ne distingue pas l'une de l'autre, et, pour les évaluer, il part, comme je l'ai fait, de la considération de la surface creuse qui termine une colonne du même liquide soulevée dans un tube capillaire; mais, bien qu'observateur ingénieux, il n'était pas au courant de la théorie de l'action capillaire; aussi parvient-il, par un raisonnement dont l'erreur est palpable, à des valeurs et à une loi nécessairement fausses.

Dans la communication verbale dont j'ai parlé (§ 116), M. Henry a décrit des expériences au moyen desquelles il a cherché à mesurer la pression exercée sur l'air intérieur par une bulle de savon d'un diamètre donné. Voici essentiellement, d'après le compte rendu de cette communication, comment a opéré M. Henry : une bulle de savon était gonflée à l'extrémité de l'une des branches d'un tube de verre en U partiellement rempli d'eau; la différence de niveau dans les deux branches donnait alors la mesure de la pression. Malheureusement le compte rendu, qui laisse d'ailleurs à désirer quant à la clarté, ne fait point connaître les nombres obtenus, et je ne pense pas que M. Henry les ait publiés ultérieurement.

Dans un travail présenté à la Société philomatique en 1856 et imprimé en 1859 dans les *Comptes rendus*, M. De Tessan avance [1] que si la vapeur qui forme les nuages et les brouillards était composée de vésicules, l'air enfermé dans une vésicule de $0^{mm},02$ de diamètre y serait soumis, de la part de celle-ci, à une pression équivalente à $\frac{1}{7}$ d'atmosphère.

(1) *Comptes rendus*, tome XLVIII, p. 1045.

M. De Tessan ne dit pas, dans ce travail, comment il a obtenu l'évaluation ci-dessus, mais il m'apprend, par une lettre dont il m'a honoré en 1869, qu'il a pris pour mesure de la pression dont il s'agit la hauteur à laquelle l'eau serait soutenue dans un tube capillaire d'un diamètre intérieur égal à celui de la vésicule; il était donc parti de la même idée que moi, seulement on voit qu'il s'est trompé en ce sens qu'il n'a eu égard qu'à la surface intérieure de la pellicule liquide. En effet, d'après la formule du paragraphe précédent, la pression exercée sur l'air intérieur par une bulle d'eau de $0^{mm},02$ de diamètre équivaudrait à celle d'une colonne d'eau de 3 mètres de hauteur, ce qui égale à peu près les $\frac{2}{7}$ de la pression atmosphérique; M. De Tessan n'a donc trouvé que la moitié de la valeur réelle.

Ainsi qu'on le verra au § 156, Sir W. Thomson a donné, dès 1858, en fonction d'un autre élément que la hauteur capillaire et la densité, une expression exacte de la pression d'une bulle sur l'air contenu.

Enfin, en 1866, M. Tait a calculé (1), au moyen du même élément, d'une part les pressions auxquelles seraient respectivement soumises, dans l'eau, des bulles d'air de diamètres déterminés très-petits, et, d'autre part, les pressions à l'intérieur des vésicules de vapeur d'eau de diamètres également déterminés.

§ 119. Après avoir obtenu l'expression générale de la pression exercée par une sphère laminaire sur l'air qu'elle emprisonne, il me restait à soumettre ma formule au contrôle de l'expérience. J'ai employé, pour cela, le procédé de M. Henry, c'est-à-dire que la pression a été

(1) *Note on the compression of air in an air-bubble under water.* (Proceedings of the Royal Soc. of Edinburgh, vol. V, 1865-66, p. 563).

mesurée directement par la hauteur de la colonne d'eau à laquelle elle faisait équilibre.

De notre formule, on déduit $pd = 2h\rho$; pour un même liquide et à une même température, le produit de la pression par le diamètre de la bulle doit donc être constant, puisque h et ρ le sont. C'est cette constance que j'ai d'abord cherché à vérifier pour des bulles de liquide glycérique de diamètres très-différents.

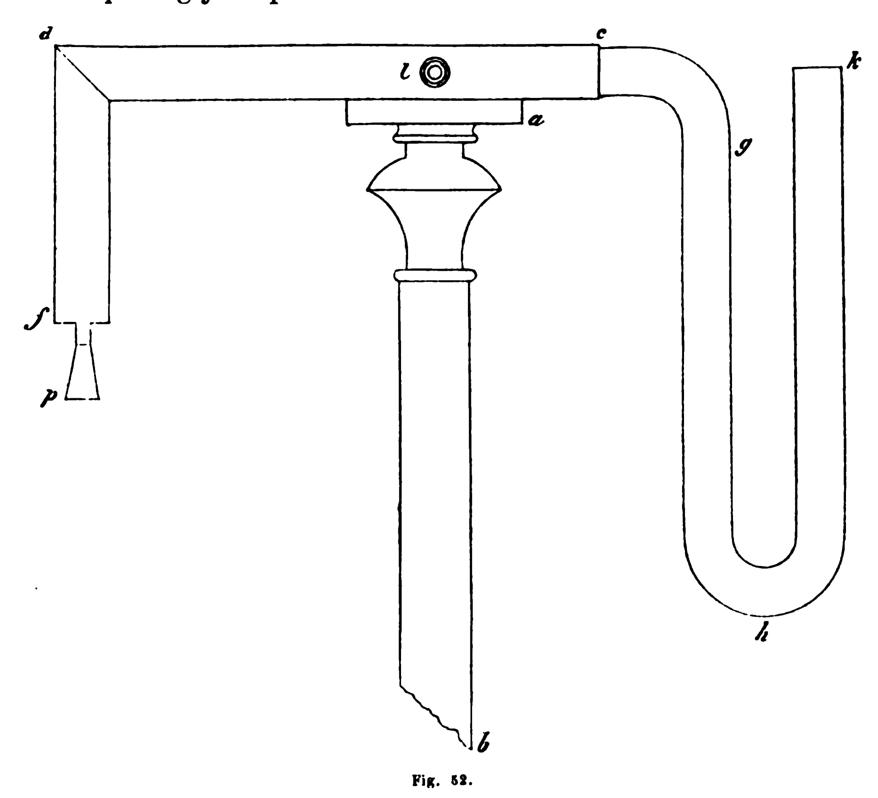


Fig. 52.

L'appareil dont j'ai fait usage est représenté *fig.* 52, en projection verticale. *ab* est la partie supérieure d'un support dont la hauteur totale est de 40 centimètres. Sur

ce support est fixé un tube en cuivre *cdf*, à l'extrémité *c* duquel est mastiqué un tube recourbé en verre *cghk* destiné à servir de manomètre et dont le diamètre intérieur est d'un centimètre environ ; la longueur *dg* est de 20 centimètres. Le tube de cuivre a, en *l*, un embranchement horizontal, qui n'a pu être dessiné dans la même figure parce qu'il est dirigé vers le spectateur, mais qu'on voit à part en *lm* (*fig.* 53) ; à l'extrémité *m* est mastiqué un tube en verre *mn*, qui n'a qu'environ 2 millimètres de diamètre intérieur. Enfin à l'extrémité *f* du tube de cuivre (*fig.* 52) est soudé un ajutage en fer *fp*, évasé inférieurement en un petit entonnoir dont le bord a 5 millimètres de diamètre ; cet entonnoir a été légèrement oxydé par de l'acide azotique affaibli (§ 110).

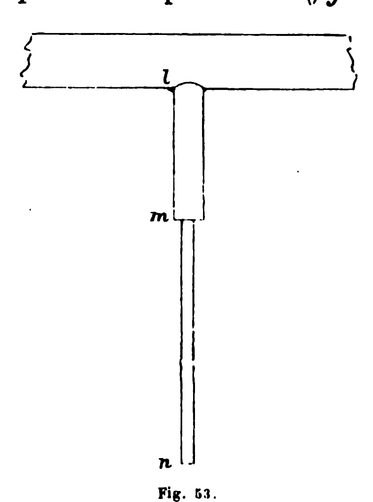


Fig. 53.

Pour employer cet appareil, on commence par introduire de l'eau distillée dans le manomètre *ghk*, en quantité suffisante pour occuper une hauteur de quelques centimètres dans les deux branches ; puis on porte sous l'ajutage *fp* une capsule contenant le liquide destiné à former les bulles, on y fait plonger le bord *p* du petit entonnoir, et l'on abaisse la capsule ; enfin, appliquant la bouche à l'orifice *n* du tube de verre de l'embranchement (*fig.* 53), on souffle avec ménagement. Une bulle apparaît aussitôt à l'ajutage ; on lui donne, avec des précautions que j'indiquerai bientôt, le diamètre que l'on juge convenable,

et, dès qu'elle l'a atteint, on bouche soigneusement l'orifice *n* avec une petite boule de cire. L'eau est alors un peu plus élevée dans la branche *hk* du manomètre (*fig.* 52) que dans la branche *hg*, par suite de la pression qu'exerce la bulle, et il ne reste plus qu'à mesurer la différence de niveau ci-dessus et le diamètre de la bulle. Pour la première de ces mesures, on se sert d'un cathétomètre à la manière ordinaire, et, pour la seconde, on couche le même instrument dans une position horizontale, en le plaçant sur des supports convenables.

§ 120. Ces expériences, fort simples en principe, offrent des difficultés notables d'exécution. En premier lieu, l'air qu'on insuffle dans l'appareil est plus chaud que l'air ambiant, de sorte que la bulle, après sa formation, se contracte un peu par le refroidissement graduel de l'air contenu dans son intérieur et dans les tubes de l'instrument ; il faut donc attendre quelque temps avant de procéder à la mesure du diamètre.

En second lieu, les bulles de grand diamètre n'exerçant qu'une pression très-faible, une petite erreur dans la mesure de celle-ci a une influence considérable sur le produit *pd*; il faut donc, si l'on veut que les résultats n'oscillent pas trop autour de la véritable valeur, s'arrêter à une certaine limite de diamètre.

En troisième lieu, les bulles très-petites ont aussi leurs inconvénients : pour les amener au diamètre voulu, et pour obvier, en même temps, à la contraction par le refroidissement, on les gonfle d'abord beaucoup au-delà de la grosseur qu'elles doivent avoir, et on les laisse ensuite diminuer spontanément par l'expulsion d'une partie de l'air qu'elles contiennent ; or, quand cette diminution est arrivée à un certain degré, elle devient très-rapide, et il faut beaucoup d'adresse pour

appliquer la boule de cire à l'instant précisément convenable. En outre, dans mes expériences, ces petites bulles ont paru persister moins longtemps que les grosses ; elles éclataient fréquemment avant qu'on pût achever les mesures.

Enfin, bien que le manomètre de mon instrument ait un centimètre de diamètre intérieur, l'équilibre ne s'y établit que très-lentement, et l'on commettrait de grandes erreurs si l'on n'avait égard à cette circonstance.

Remarquons encore que, lorsqu'on vient de former une bulle, il y a en général, au bas de celle-ci, une goutte suspendue, goutte dont le poids allonge un peu la bulle dans le sens vertical. Pour se débarrasser, sans faire éclater la lame, de cette petite masse additionnelle, on amène doucement en contact avec elle l'un des angles d'un morceau de papier à filtre ; la goutte est alors partiellement absorbée, et l'on répète la même opération avec d'autres angles du même papier, jusqu'à ce que l'excès de liquide ait entièrement ou sensiblement disparu.

Ajoutons une dernière remarque. Lorsqu'on veut former une bulle, si l'on plongeait dans le liquide tout l'entonnoir de l'ajutage, le liquide monterait, par l'action capillaire, dans l'intérieur du tube étroit qui surmonte cet entonnoir, et ne serait qu'en partie expulsé par le souffle, de sorte qu'après le gonflement de la bulle, il pourrait se rassembler en petite masse à la partie inférieure du tube dont il s'agit, et interrompre ainsi la communication entre la bulle et le manomètre. Pour éviter cet inconvénient, on commence par mouiller de liquide glycérique toute la surface extérieure du petit entonnoir, puis on se borne à plonger le bord extrême de celui-ci.

Voici maintenant comment on a procédé. Pour les

plus grands diamètres du tableau du paragraphe suivant, on gonflait d'abord la bulle jusqu'à 6 centimètres environ, on appliquait la boule de cire, puis on attendait cinq minutes, après quoi l'on ouvrait de nouveau le tube d'insufflation, on laissait diminuer la bulle jusqu'à ce qu'elle parût avoir le diamètre voulu, et on l'arrêtait alors au moyen de la cire. Pour tous les diamètres moindres, on commençait par gonfler la bulle jusqu'à 4 centimètres à peu près, et, après avoir appliqué la cire, on attendait dix minutes avant de laisser s'effectuer la diminution. Des essais préalables avaient montré qu'avec ces précautions, le diamètre demeurait ensuite invariable. La bulle sur laquelle on se proposait d'opérer ayant ainsi atteint la dimension désirée, on enlevait la goutte suspendue à sa partie inférieure, on inclinait l'instrument à droite et à gauche afin de bien mouiller les deux branches du manomètre un peu au-dessus des deux niveaux, et l'on mesurait le diamètre. On attendait alors que dix minutes au moins se fussent écoulées depuis que l'instrument était en repos, afin de laisser à l'équilibre du manomètre un certain temps pour s'établir, puis on mesurait la pression, et, cinq minutes après, on la mesurait encore. Si les résultats de ces deux mesures n'étaient pas exactement les mêmes, on prenait une troisième mesure après un nouvel intervalle de cinq minutes, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on obtînt deux résultats successifs identiques ou que la différence fût en sens contraire des précédentes; dans le premier cas, les deux derniers résultats étaient considérés comme donnant la valeur de la pression; dans le second, leur différence devant être attribuée à une petite erreur d'observation, on prenait, pour valeur de la pression, la moyenne de ces deux mêmes résultats.

§ 121. Le tableau suivant renferme les résultats de ces expériences ; je les ai rangés non dans l'ordre où ils ont été obtenus, mais dans l'ordre croissant des diamètres, et je les ai distribués en groupes de diamètres analogues. Pendant la durée des opérations, la température a varié de 18°,5 à 20°.

DIAMÈTRES, OU VALEURS DE *d*.	PRESSIONS, OU VALEURS DE *p*.	PRODUITS, OU VALEURS DE *pd*.
7mm,55	3mm,00	22,65
10,37	2,17	22,50
10,55	2,13	22,47
23,35	0,98	22,88
26,44	0,83	21,94
27,58	0,83	22,89
46,60	0,48	22,37
47,47	0,48	22,78
47,85	0,43	20,57
48,10	0,55	26,45

La moyenne générale des produits est 22,75, et l'on voit que, sauf dans les deux derniers, les écarts d'avec cette moyenne générale sont partout peu notables ; on voit, en outre, qu'ils sont irrégulièrement distribués. Comme d'ailleurs le premier diamètre est à ceux du dernier groupe à peu près comme 1 à 6, ces résultats suffisent, je pense, pour établir nettement la constance du produit *p d*, et, par suite, pour vérifier la loi d'après laquelle la pression est en raison inverse du diamètre. On verra plus loin (§§ 175 et 179) une autre vérification de cette même loi.

Je dois dire ici que, dans les mesures relatives à la plus petite bulle, c'est-à-dire à celle de $7^{mm},55$ de diamètre, j'ai été contraint de faire une légère exception à la marche indiquée à la fin du paragraphe précédent : la seconde mesure de la pression excédait la première de $0^{mm},02$; on se proposait donc de prendre une troisième mesure après un nouvel intervalle de cinq minutes; mais, pendant ce temps, la bulle a crevé. On a essayé plusieurs fois de renouveler l'expérience, et toujours l'une ou l'autre des circonstances que j'ai signalées à l'égard des très-petites bulles a empêché la réussite. Comme la différence $0^{mm},02$ était si minime qu'elle pouvait être attribuée à une erreur d'observation, comme d'ailleurs, par suite de cette petitesse, il était extrêmement peu probable qu'un nouvel excès se fût montré dans une troisième mesure, comme enfin, avec un diamètre de cet ordre, de si faibles différences n'ont d'influence que sur la partie décimale du produit, j'ai cru pouvoir considérer la seconde mesure comme donnant la valeur de la pression, et conserver le résultat de l'expérience.

Quant à la moyenne générale 22,75 des résultats du tableau, sa partie décimale est nécessairement un peu trop forte, à cause de la valeur excessive 26,45 du dernier produit. Comme ce produit et celui qui le précède sont les seuls qui s'écartent notablement de 22 dans leur partie entière, on admettra, je pense, qu'on approchera davantage de la valeur véritable en négligeant ces deux produits et prenant la moyenne des autres, moyenne qui est 22,56; nous adopterons ce dernier nombre pour valeur du produit pd à l'égard du liquide glycérique.

§ 122. Restait à vérifier si cette valeur satisfait à notre formule, d'après laquelle on a $pd = 2h\rho$, les quantités ρ et h étant respectivement, comme on l'a vu, la densité

du liquide et la hauteur qu'atteindrait ce même liquide dans un tube capillaire d'un millimètre de diamètre. Pour cela, il fallait donc chercher les valeurs de ces deux quantités à l'égard du liquide glycérique.

La densité a été déterminée au moyen de l'aréomètre de Fahrenheit, à la température de 17°, température peu inférieure à celles des expériences précédentes, et l'on a trouvé ainsi

$$\rho = 1{,}1065.$$

Pour déterminer la hauteur capillaire, on a employé le procédé de Gay-Lussac, c'est-à-dire la mesure au cathétomètre, en prenant toutes les précautions connues pour assurer l'exactitude du résultat. L'expérience a été faite à la température de 19°. Je m'étais procuré un tube capillaire dont le diamètre intérieur n'était que d'une fraction de millimètre, on verra bientôt pourquoi. On a tracé d'abord à la lime un petit trait sur ce tube, à trois centimètres et demi environ de l'une de ses extrémités, distance que l'on savait, par une essai préalable fait sur un autre fragment du même tube, être un peu supérieure à la hauteur de la colonne capillaire soulevée ; ensuite on a mouillé parfaitement le tube à l'intérieur en le plongeant à plusieurs reprises jusqu'au fond du vase contenant le liquide glycérique, et le secouant chaque fois qu'on l'avait retiré; enfin, après l'avoir essuyé extérieurement, on l'a mis en place, en l'enfonçant dans le liquide jusqu'à ce que l'extrémité de la colonne soulevée parût s'arrêter très-près de la marque, et l'on a abaissé la pointe d'acier pour lui faire affleurer le liquide extérieur. Alors on a amené le fil horizontal de la lunette du cathétomètre en contact avec l'image du point le plus bas du ménisque concave, et l'on a observé

de cinq en cinq minutes, en rétablissant chaque fois le contact, jusqu'à ce que le point en question parût stationnaire; on a attendu encore, et l'on n'a effectué la mesure qu'après avoir constaté pendant une demi-heure entière l'immobilité parfaite du sommet de la colonne. Les mouvements avaient été très-petits, de sorte que la colonne se terminait encore près de la marque. La lecture au cathétomètre a donné, pour la distance du point le plus bas du ménisque concave au niveau extérieur, $27^{mm},35$.

Cette mesure prise, on a enlevé le tube, on l'a coupé à la marque, et l'on a procédé à la mesure du diamètre intérieur en ce point, au moyen d'un microscope muni d'un micromètre donnant directement les centièmes de millimètre. On a reconnu que la section intérieure du tube était légèrement elliptique; le plus grand de ses diamètres a été trouvé de $0^{mm},374$, et le plus petit de $0^{mm},357$; on a pris la moyenne, savoir $0^{mm},3655$ pour représenter le diamètre intérieur du tube supposé cylindrique.

Pour avoir la vraie hauteur de la colonne capillaire, il faut, comme on sait, ajouter à la hauteur du point le plus bas du ménisque le sixième du diamètre du tube, ou, dans le cas actuel, $0^{mm},06$; la vraie hauteur de notre colonne était conséquemment $27^{mm},41$.

Maintenant, pour obtenir la hauteur h à laquelle le même liquide s'élèverait dans un tube ayant exactement un millimètre de diamètre intérieur, il suffit, en vertu de la loi connue, de multiplier la hauteur ci-dessus par le diamètre du tube, et l'on trouve ainsi, en définitive,

$$h = 10^{mm},018.$$

C'est ici le lieu de dire par quelle raison j'ai choisi,

pour l'expérience, un tube dont le diamètre intérieur fût notablement moindre qu'un millimètre. Le raisonnement par lequel je suis arrivé (§ 116) à la formule, suppose que la surface qui termine la colonne capillaire est hémisphérique ; or cela n'est jamais rigoureusement vrai, mais dans un tube aussi étroit que celui dont je me suis servi, la différence est nécessairement tout à fait insensible, de sorte qu'en calculant ensuite, par la loi de la raison inverse de l'élévation au diamètre, la hauteur pour un tube d'un millimètre de diamètre, on devait avoir cette dernière hauteur telle qu'elle serait si la surface supérieure était exactement hémisphérique.

Les valeurs de ρ et de h étant ainsi déterminées, on en tire

$$2h\rho = 22{,}17,$$

nombre qui diffère bien peu de 22,56, obtenu dans le paragraphe précédent comme valeur du produit pd. La formule $pd = 2h\rho$ peut donc être regardée comme vérifiée par l'expérience, et la vérification paraîtra plus complète encore si l'on considère que les deux résultats sont respectivement déduits d'éléments tout à fait différents.

§ 123. Abordons actuellement la seconde des questions annoncées au commencement du § 116 ; celle-ci a pour objet la recherche d'une limite très-petite au-dessous de laquelle se trouve, au moins dans le liquide glycérique, la valeur du rayon d'activité sensible de l'attraction moléculaire.

L'idée d'une évaluation approximative de ce rayon a été émise pour la première fois, je pense, en 1841, par de Maistre (1). En suspendant des gouttes d'eau à l'extré-

(1) *Notice sur la cause qui fait surnager une aiguille d'acier sur la surface de l'eau* (Bibl. Univ., nouv. série, t. XXXV, p. 192).

mité inférieure de baguettes de verre verticales, il trouve que la goutte a le plus grand volume quand le diamètre de la baguette est de $2\frac{1}{2}$ lignes, et que la goutte est hémisphérique. Admettant alors qu'une molécule d'eau en contact avec la surface du verre soutient toutes les molécules situées verticalement au-dessous d'elle, il en conclut que, dans l'eau, l'attraction moléculaire s'étend au moins jusqu'à la distance de $1\frac{1}{4}$ ligne. Je n'ai pas besoin d'insister sur l'erreur de cette déduction.

Exposons maintenant les résultats de nos propres recherches : l'exactitude de la formule $p=\frac{2h\rho}{d}$ suppose, comme nous allons le montrer, que la lame qui constitue la bulle n'a pas, en tous ses points, des épaisseurs moindres que le double du rayon d'activité sensible de l'attraction moléculaire.

On a vu (§ 116) que la pression exercée par une bulle sur l'air qu'elle emprisonne est la somme des actions dues séparément aux courbures de ses deux faces. D'autre part, on sait que, dans le cas d'une masse liquide pleine, la pression capillaire exercée par le liquide sur lui-même émane de tous les points d'une couche superficielle ayant pour épaisseur le rayon d'activité en question. Maintenant, si l'épaisseur de la lame qui constitue une bulle est partout supérieure ou égale au double de ce rayon, chacune des deux faces de la lame aura sa couche superficielle non altérée, et la pression exercée sur l'air contenu aura la valeur qu'indique notre formule. Mais si, en tous ses points, la lame a des épaisseurs inférieures au double de ce même rayon, les deux couches superficielles n'ont plus leur épaisseur complète, et le nombre des molécules comprises dans chacune d'elles étant ainsi amoindri, ces deux couches doivent nécessairement

exercer des actions moins fortes, et conséquemment la somme de celles-ci, c'est-à-dire la pression sur l'air intérieur, doit être plus petite que ne l'indique la formule.

Il suit de là que si, dans les expériences des §§ 120 et 121, l'épaisseur des lames qui formaient les bulles était descendue, dans toute l'étendue de ces dernières, au-dessous de la limite dont il s'agit, les résultats auraient été trop faibles ; mais, dans ce cas, on aurait remarqué des diminutions progressives et continues dans les pressions, ce qui n'est jamais arrivé, bien que les couleurs des bulles accusassent une grande ténuité. Tous les physiciens admettent, du reste, que le rayon d'activité sensible de l'attraction moléculaire est excessivement minime.

Mais ce qui précède permet d'aller plus loin, et de déduire de l'expérience une donnée sur la valeur du rayon d'activité sensible, au moins dans le liquide glycérique.

Après que la lame a acquis une minceur uniforme (§ 108), sauf, bien entendu, à la partie tout à fait inférieure, où il y a toujours une petite accumulation de liquide, si la pression exercée sur l'air intérieur éprouvait une diminution, celle-ci serait accusée par le manomètre, et on la verrait progresser d'une manière continue au fur et à mesure de l'atténuation ultérieure de la lame. Dans ce cas, l'épaisseur qu'avait la lame quand la diminution de pression a commencé, se déterminerait au moyen de la teinte que présentait en ce moment l'espace central (ibid.), et la moitié de cette épaisseur serait la valeur du rayon d'activité sensible de l'attraction moléculaire. Si, au contraire, la pression demeure constante jusqu'à la disparition de la bulle, on conclura de la teinte de l'espace central l'épaisseur finale de la lame, et la

moitié de cette épaisseur constituera, du moins, une limite très-minime au-dessous de laquelle se trouve le rayon dont il s'agit.

§ 124. J'ai fait, dans ce sens, un grand nombre d'expériences, dont je vais rendre compte. On donnait d'abord à la bulle un diamètre d'environ quatre centimètres, on la laissait ensuite diminuer jusqu'à deux centimètres à peu près, et quelquefois jusqu'à un centimètre, puis on appliquait la boule de cire ; alors, dans les premières expériences, on enlevait la goutte, et l'on introduisait l'ajutage avec la bulle dans l'intérieur d'un petit bocal dont on fermait simplement l'orifice avec un disque de carton traversé en son milieu par le tube; enfin on établissait le contact du fil horizontal de la lunette du cathétomètre avec le sommet de l'image de la surface de l'eau dans l'une des branches du manomètre, et comme l'équilibre n'avait pas lieu immédiatement (§ 120), on rétablissait de temps à autre le contact, jusqu'à ce qu'il devînt stationnaire.

Huit bulles observées dans ces circonstances ont pu être suivies jusqu'à leur disparition. Sept d'entre elles ont éclaté avant d'avoir dépassé les premières couleurs du deuxième ordre ; une seule a paru atteindre l'indigo de ce même ordre, mais il y a quelque incertitude à cet égard. La plus grande persistance a été de 14 heures.

Quant au contact du fil de la lunette avec l'image de la surface de l'eau, il n'a jamais, à une seule exception près, varié dans le sens d'une diminution de pression; mais, chose singulière, il a quelquefois varié de petites quantités dans le sens opposé. Pour l'une des bulles, on s'est assuré, par des mesures prises avant et après ces variations, que la pression avait réellement augmenté quelque peu. Lorsqu'une semblable variation se produi-

sait, c'était avec une certaine rapidité, et le manomètre demeurait ensuite stationnaire, soit jusqu'à la disparition de la bulle, soit jusqu'à une nouvelle variation de même sens.

Ces variations ne sont pas dues à des changements dans la température, car celle de la chambre était bien constante; elle ne proviennent pas non plus d'une application imparfaite de la cire, car, dans ce cas, l'augmentation de pression serait continue et accélérée.

§ 125. Ces expériences auraient déjà pu me fournir un résultat; mais j'ai cherché à faire en sorte que les couleurs des bulles allassent plus loin. Conduit à soupçonner qu'une petite action chimique entre le fer de l'ajutage et le liquide altérait un peu la constitution de ce dernier dans le voisinage de l'orifice, j'ai fait adapter à celui-ci, avec de la cire à cacheter, un bout de tube de verre de même diamètre extérieur, et à parois assez minces, et l'on a gonflé une bulle à l'extrémité libre de ce tube, bulle que l'on a introduite comme précédemment dans le petit bocal. Alors les couleurs ont marché jusque dans le troisième ordre, après quoi elles ont peu à peu rétrogradé (§ 108) ; la bulle a persisté 24 heures. Pour empêcher (§ 109) la rétrogradation des teintes, on a placé au fond du bocal quelques morceaux de potasse caustique, et, par l'application de petits bourrelets de saindoux autour des joints, on a fait en sorte qu'après l'introduction de la bulle, le bocal fût hermétiquement fermé.

De plus, comme le peu de liquide qui s'accumule toujours par degrés au bas de la bulle, doit contribuer par son poids à faire éclater celle-ci, on avait cette fois attendu dix minutes avant d'enlever la goutte; la lame était donc déjà plus mince quand on l'a introduite dans

le bocal, et l'accumulation résultant de la descente ultérieure du liquide devait être beaucoup moindre. Or, dans ces conditions, la diminution d'épaisseur de la lame a été continue, la bulle a persisté près de trois jours, et, lorsqu'elle a éclaté, elle était parvenue au passage du jaune au blanc du premier ordre; elle présentait alors un espace central jaune pâle, entouré d'un anneau blanc. Le niveau de l'eau dans la branche observée du manomètre a éprouvé de petites oscillations, tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, mais dont la dernière était dans le sens d'une augmentation de pression. Bien que, pendant la longue durée de cette bulle, la température de la chambre ait nécessairement subi de petits changements, les oscillations ci-dessus ne peuvent leur être entièrement attribuées, car, si cela était, on aurait dû voir, après chacune des trois nuits, un mouvement du manomètre dans le sens d'une augmentation de pression; or on a observé le contraire après les deux premières nuits; ce n'est qu'après la troisième qu'il y a eu mouvement dans ce sens.

Il résulte de la marche de ces mêmes mouvements que si la pression a varié, c'est d'une manière irrégulière, dans les deux sens, et pour aboutir, non à une diminution, mais à une augmentation au moins relative; on peut donc admettre, je pense, que l'épaisseur finale de la lame était encore supérieure au double du rayon d'activité sensible de l'attraction moléculaire[1].

(1) J'ai dit que le bocal dans lequel on a introduit la bulle était petit, et qu'on avait fermé hermétiquement les joints. Cela pourrait paraître en contradiction avec ce que j'ai avancé dans le § 106, savoir que, pour atteindre le maximum de persistance, il faut employer un vase de dimensions considérables par rapport à la bulle, et ne pas en dessécher complétement l'atmosphère intérieure. C'est que, dans l'expérience actuelle, il s'agissait d'obtenir, non la plus grande persistance, mais bien la plus grande atténuation de la lame, ce qui exigeait qu'on empêchât, autant que possible, toute absorption de vapeur aqueuse par cette lame.

§ 126. Voyons actuellement ce que l'on déduit de cette dernière expérience. D'après le tableau donné par Newton, l'épaisseur d'une lame d'eau pure qui réfléchit le jaune du premier ordre est, en millionièmes de pouce anglais, $5\frac{1}{3}$, ou 5,333, et, pour le blanc du même ordre, $3\frac{7}{8}$, ou 3,875. On peut donc prendre la moyenne, savoir 4,604, comme valeur très-approchée de l'épaisseur correspondante, toujours dans le cas de l'eau pure, au passage entre ces deux couleurs; et, le pouce anglais étant égal à 25mm,4, cette épaisseur équivaut à $\frac{1}{8554}$ de millimètre. Cela posé, on sait que, pour deux substances différentes, les épaisseurs des lames qui réfléchissent la même teinte sont entre elles en raison inverse des indices de réfraction de ces substances. Pour avoir l'épaisseur réelle de notre lame de liquide glycérique, il suffit donc de multiplier le dénominateur de la fraction précédente par le rapport de l'indice du liquide glycérique à celui de l'eau. J'ai mesuré approximativement le premier au moyen d'un prisme creux à liquides, et je l'ai trouvé égal à 1,377. Celui de l'eau étant 1,336, on obtient enfin, pour l'épaisseur de la lame glycérique, $\frac{1}{8811}$ de millimètre. La moitié de cette quantité, ou $\frac{1}{17622}$ de millimètre, constitue donc la limite fournie par l'expérience en question; mais, pour nous placer plutôt au delà, nous adopterons $\frac{1}{17000}$.

Nous arrivons ainsi à cette conclusion très-probable que, dans le liquide glycérique, le rayon d'activité sensible de l'attraction moléculaire est moindre que $\frac{1}{17000}$ de millimètre.

§ 127. Toute la recherche précédente est extraite de ma 5me Série, publiée en 1861. De son côté, Dupré est arrivé, en 1866, dans le § 173 de son 5me Mémoire *Sur la théorie mécanique de la chaleur*(1), par une route absolument différente, à la conclusion que, dans l'eau, le rayon de l'attraction moléculaire est de beaucoup supérieur à $\frac{1}{5000000}$ de millimètre; en outre, dans un ouvrage sur le même sujet, ouvrage qui a paru en 1869 et dont je parlerai plus loin (§ 164), Dupré est conduit à admettre qu'à partir d'une épaisseur égale au double du rayon dont il s'agit jusqu'à une épaisseur égale à ce rayon lui-même, la pression qu'une bulle exerce sur l'air intérieur varie extrêmement peu, d'où il suivrait que j'aurais dû prendre, pour ma limite supérieure, non la moitié de l'épaisseur de la lame, mais cette épaisseur entière; d'après cela, Dupré adopte, comme limite supérieure, $\frac{1}{9000}$ de millimètre.

Mais, en 1869 aussi, M. Quincke a publié une Note(2) où il expose une méthode extrêmement ingénieuse au moyen de laquelle il parvient, non à une limite supérieure ou inférieure, mais à une valeur approchée du rayon en question : il la trouve égale à environ $0^{mm},000050 = \frac{1}{20000}$ de millimètre.

Voici essentiellement en quoi consiste sa méthode : quand un liquide s'appuie contre une paroi verticale solide qu'il ne mouille pas, il aboutit à cette paroi sous un angle qui, on le sait, dépend à la fois de la nature du solide et de celle du liquide. D'après cela,

(1) *Ann. de Chim. et de Phys. de Paris*, 4me série, Tome VII.

(2) *Ueber die Entfernung in welcher die Molecularkräfte der Capillarität noch wirksam sind.* (Ann. de M. Poggendorff, vol. CXXXVII, p. 402).

imaginons, appliquée sur une portion de l'une des faces d'une plaque de verre verticale une couche cunéiforme, comme le dit l'auteur, d'une autre substance solide, l'arête du coin étant verticale, et l'épaisseur, excessivement petite à cette arête, augmentant par degrés insensibles à partir de là. Si alors un liquide s'appuie contre la plaque, de façon qu'une partie de son bord aboutisse au verre et une autre partie à la couche cunéiforme, l'angle de contact de cette seconde partie variera depuis l'arête jusqu'à une certaine distance, car, au voisinage de cette arête, l'action moléculaire mutuelle du verre et du liquide se fera encore sentir ; mais, au delà de la distance où l'épaisseur de la couche est égale au rayon de cette action mutuelle, l'angle de contact se montrera constant, ne dépendant plus que de l'action mutuelle du liquide et de la substance qui forme la couche.

Or M. Quincke a réussi à obtenir, sur le verre, de ces couches cunéiformes de différentes substances, et à déterminer, dans chaque cas, l'épaisseur qui remplit la condition indiquée. Avec une couche d'argent métallique et le liquide étant de l'eau, il a trouvé, en désignant par l l'épaisseur en question, $l > 0^{mm},000054$; avec une couche de sulfure d'argent et en substituant le mercure à l'eau, l'expérience lui a donné $l = 0^{mm},000048$; avec le mercure et une couche d'iodure d'argent, $l = 0^{mm},000059$; avec le mercure et une couche de collodion, $l < 0^{mm},000080$. M. Quincke conclut de ses expériences qu'on peut adopter, en moyenne, $l = 0^{mm},000050$.

Il paraît donc résulter de ces mêmes expériences : en premier lieu, que le rayon d'activité sensible de l'attraction moléculaire ne varie pas beaucoup avec les différentes substances, et qu'on peut adopter, pour sa valeur moyenne approximative, $\frac{1}{20000}$ de millimètre ; en

second lieu, que la limite supérieure trouvée par moi, savoir $\frac{1}{17000}$ de millimètre, est très-voisine de la vraie valeur; en troisième lieu enfin, que, dans mes expériences, contrairement à ce que pensait Dupré, c'était bien la moitié de l'épaisseur de la lame qu'il fallait prendre.

Avertissons, en passant, que, dans cette Note, M. Quincke m'attribue une opinion que je n'ai point manifestée : il me fait dire que, selon moi, une lame liquide ne peut plus subsister quand son épaisseur devient inférieure au double du rayon de l'attraction moléculaire; on peut voir, par le contenu des paragraphes qui précèdent, qu'une idée de ce genre ne s'est pas présentée à moi. Du reste, cette idée, qui appartient en réalité à M. Quincke, doit être vraie en thèse générale; j'y reviendrai plus loin (§ 165).

CHAPITRE IV.

Figures d'équilibre qui ne sont pas de révolution. Principe général concernant la réalisation des surfaces à courbure moyenne nulle. Résultats des géomètres, et vérifications expérimentales.

§ 128. Arrivons aux figures d'équilibre qui ne sont pas de révolution; et d'abord énonçons un principe général qui permet de réaliser, à l'état laminaire, toute surface à courbure moyenne nulle dont on a soit l'équation en coordonnées finies, soit la génération géométrique.

Une surface à courbure moyenne nulle étant donnée, concevez-y tracé un contour fermé quelconque, astreint aux seules conditions 1° *qu'il circonscrive une portion*

finie de la surface, et 2° que cette portion n'excède pas la limite de stabilité, si la surface donnée a de telles limites; ployez un fil de fer de manière qu'il figure exactement le contour fermé en question; oxydez-le légèrement par de l'acide azotique affaibli; plongez-le entièrement dans le liquide glycérique, et retirez-le; vous le trouverez occupé par une lame représentant la portion de surface dont il s'agit.

En effet, la lame qui s'est développée dans le contour solide, et qui remplit nécessairement celui-ci, a ses deux faces dans l'air libre; elle doit donc (§ 97) se façonner de manière à représenter une portion finie de surface à courbure moyenne nulle passant par le contour en question, c'est-à-dire, conséquemment, une portion de la surface donnée. On réalise ainsi, comme par enchantement, des surfaces qui, pour la plupart, sont fort remarquables; nous en verrons bientôt des exemples.

Dans l'énoncé du principe ci-dessus, j'ai assigné, comme première condition du contour fermé, qu'il soit de nature à comprendre dans son intérieur une portion finie de la surface donnée; c'est qu'en effet, on peut concevoir des contours fermés qui ne satisfont pas à cette condition : si, par exemple, on choisissait, comme contour fermé tracé sur un caténoïde, la section par un plan perpendiculaire à l'axe, il est clair que ce contour ne circonscrirait aucune portion finie de la surface, celle-ci s'étendant indéfiniment de part et d'autre de ce même contour.

Quant à la seconde condition, elle est évidente : si la surface donnée a, par rapport au genre de contour qu'on adopte, une limite de stabilité, et si cette limite est dépassée par la portion circonscrite, il est clair que la réalisation de celle-ci sera impossible, et que la lame

développée représentera une portion d'une surface différente. Dans ce cas, il y a conséquemment deux surfaces distinctes satisfaisant l'une et l'autre aux conditions d'être à courbure moyenne nulle, de passer par le contour fermé, et d'avoir une portion finie circonscrite par ce contour; mais pour l'une seulement la portion finie est stable, et c'est elle qui se réalise. Nous verrons aussi un exemple remarquable du cas dont il s'agit.

§ 129. Meusnier avait signalé[1] comme surface telle qu'en chaque point les deux rayons de courbure principaux soient égaux entre eux et de signes contraires, ou, ce qui revient au même, comme surface à courbure moyenne nulle, l'héliçoïde gauche à plan directeur, c'est-à-dire l'héliçoïde engendré par une droite qui glisse d'un mouvement uniforme le long d'une autre droite à laquelle elle est perpendiculaire, tandis qu'elle tourne, d'un mouvement également uniforme, autour de cette même droite.

En 1842, M. Catalan[2] a démontré que, parmi les surfaces réglées, le plan et l'héliçoïde ci-dessus sont les seules dont la courbure moyenne est nulle.

En 1859, M. Lamarle a repris la question sous un point de vue plus étendu, au moyen de ses méthodes géométriques[3] : il a cherché d'une manière générale quelles sont les surfaces réglées dont la courbure moyenne est constante; il retrouve ainsi, pour le cas de la courbure moyenne nulle, le résultat de M. Catalan, et il fait voir que, dans le cas d'une courbure moyenne finie et con-

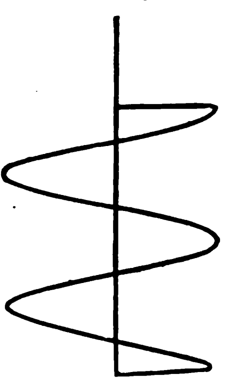
(1) *Mémoire sur la courbure des surfaces* (MÉM. DE L'ACAD. DES SCIENCES DE PARIS, savants étrangers, 1785, p. 477).

(2) *Sur les surfaces réglées dont l'aire est un minimum* (JOURN. DE M. LIOUVILLE, t. VII, p. 203.)

(3) *Théorie géométrique des centres et axes instantanés de rotation* (BULLET. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, 2me série, t. VI, p. 412).

stante, il n'y a qu'une seule surface réglée, savoir le cylindre de révolution.

§ 130. J'ai réalisé, à l'état laminaire, l'héliçoïde gauche à plan directeur. La charpente solide employée dans cette expérience est représentée en projection verticale par la *fig.* 54 : elle se compose d'un fil de fer droit servant d'axe, autour duquel circule un autre fil de fer courbé en hélice régulière; ce dernier fil est replié à chacune de ses extrémités de manière à aboutir à l'axe par une portion rectiligne et perpendiculaire à ce même axe; ces prolongements rectilignes, qui représentent les deux positions extrêmes de la droite génératrice, sont soudés à l'axe, et maintiennent ainsi l'hélice. Les fils de fer ont environ un millimètre d'épaisseur, le diamètre de l'hélice est de 10 centimètres, et la distance d'une spire à la suivante de 6 centimètres; enfin il y a deux spires complètes. Ajoutons que tout l'ensemble a été oxydé par l'acide azotique affaibli (§ 110).


Fig. 54.

Quand, après avoir plongé cette charpente dans le liquide glycérique et l'y avoir laissée pendant quelques secondes, on l'en retire, on la trouve occupée par une belle lame s'étendant partout de l'axe aux spires, et constituant d'une manière parfaite l'héliçoïde gauche en question.

En effet, l'ensemble formé par l'hélice en fil de fer, les deux parties qui la rattachent à l'axe, et la portion de celui-ci comprise entre ces deux droites, constitue un contour fermé qu'on peut évidemment concevoir tracé tout entier sur un héliçoïde gauche à plan directeur,

et qui en comprendrait dans son intérieur une portion finie; or la lame forcée, d'une part, d'adhérer à tout ce contour, et, d'autre part, de se façonner en surface à courbure moyenne nulle, doit nécessairement prendre la figure qui satisfait à ces deux conditions, c'est-à-dire celle de l'héliçoïde dont il s'agit.

Cette expérience est, on le voit, une première application du principe général du § 128.

§ 131. M. Lamarle, considérant d'une manière générale les héliçoïdes engendrés par une courbe plane qui se meut uniformément le long d'une droite fixe située dans son plan, tandis qu'elle tourne, d'un mouvement uniforme aussi, autour de cette même droite, a cherché(1) quels étaient ceux qui pouvaient satisfaire à la condition d'une courbure moyenne constante, et il a trouvé ainsi, outre l'héliçoïde gauche à plan directeur, quatre autres surfaces. Ces cinq héliçoïdes correspondent respectivement à cinq des figures d'équilibre de révolution, savoir au plan, à la sphère, à l'onduloïde, au caténoïde et au nodoïde. Quant à celui qui correspond au cylindre, c'est le cylindre lui-même.

L'équation différentielle des courbes génératrices de ces héliçoïdes s'intègre par les moyens ordinaires dans les cas correspondants au plan et au caténoïde; dans ce dernier, elle donne une surface déjà connue, et dont nous reparlerons. Dans les autres cas, l'équation s'intègre par les fonctions elliptiques.

Chacune des lignes méridiennes des figures d'équilibre de révolution, à l'exception de celles du plan et du cylindre, passe à la courbe génératrice de l'héliçoïde correspondant, en s'étendant simplement dans la direc-

(1) *Sur une classe particulière de surfaces à aire minima* (BULLET. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, 1859, 2me série, t. VI, p. 329).

tion de l'axe suivant une certaine loi, et en conservant les distances de ses différents points à cet axe. D'après ce résultat, la demi-circonférence qui constitue la ligne méridienne de la sphère devient une courbe plus allongée, dont le sommet est distant de l'axe d'une quantité égale au rayon de la demi-circonférence en question; la ligne méridienne de l'onduloïde se change en une autre courbe ondulée, qui s'approche et s'éloigne autant de l'axe, mais dont les ondulations sont plus longues; etc. La ligne méridienne du plan étant une droite perpendiculaire à l'axe, ne peut subir de modifications dans le sens de celui-ci, elle reste telle qu'elle est, et engendre l'hélicoïde gauche à plan directeur; enfin la ligne méridienne du cylindre ne peut non plus se modifier, et elle engendre, comme héliçoïde, ce même cylindre.

Ajoutons que la solution de M. Lamarle comprend nécessairement les figures de révolution, celles-ci étant ce que deviennent les héliçoïdes dont il s'agit quand la vitesse de translation de la courbe génératrice est nulle.

§ 132. La courbe génératrice de l'héliçoïde dérivé de la sphère, courbe pour laquelle M. Lamarle a trouvé une construction assez simple, aboutit à l'axe sous des angles aigus; il faut donc, pour la continuité, la concevoir se prolongeant de l'autre côté de l'axe par des arcs symétriques au précédent, puis repassant du premier côté, et ainsi de suite, en formant une ligne ondulée indéfinie, symétriquement coupée par l'axe dans toute son étendue. Dans un cas particulier calculé par M. Lamarle, où chacun de ces arcs, pendant qu'il glisse d'une quantité égale à la longueur de sa corde, effectue à fort peu près sept neuvièmes de révolution, la courbe est celle que représente la *fig.* 55. Si l'on coupe par un plan perpendiculaire à l'axe l'héliçoïde engendré, la section

a la forme représentée *fig.* 56; *a* est le point par où passe l'axe.

J'ai réalisé partiellement ce même héliçoïde, en ne prenant que la figure engendrée par un seul des arcs de la courbe de la *fig.* 55. Alors la section transversale n'est que la moitié de la courbe de la *fig.* 56, savoir la courbe *abcdfa*. J'ai fait façonner, en fil de fer, trois courbes égales de cette dernière forme, plus deux plaques de fer ayant encore la même ligne pour contour, et destinées à servir de bases à la figure liquide. Ces pièces avaient des dimensions environ doubles de celles de la *fig.* 56; elles ont été fixées transversalement, chacune par son point *a*, et dans des azimuts différant successivement l'un de l'autre de 90°, en cinq points équidistants d'un fil de fer droit vertical; celui-ci était entouré de fil de coton, et porté sur un petit pied. Chacun des intervalles entre ces mêmes pièces était, en conséquence du calcul de M. Lamarle, les 0,324 de la corde de l'un des arcs de la courbe génératrice (*fig.* 55). Ce système ayant été placé dans le mélange alcoolique, on a fait adhérer à l'ensemble des cinq courbes, en employant des précautions convenables, une masse d'huile en excès; puis on a enlevé graduel-

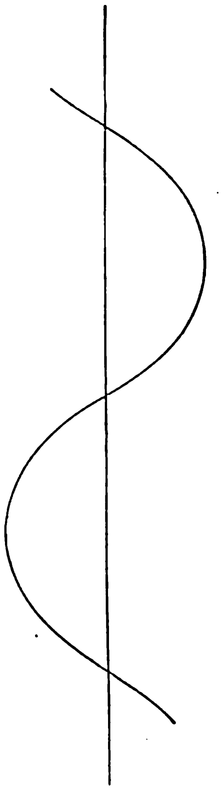


Fig. 55.

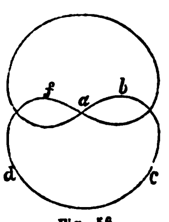


Fig. 56.

lement de ce dernier liquide, jusqu'à ce que la surface de la figure passât exactement et d'une manière continue par les contours des cinq courbes. Ce point atteint, la figure liquide réalisait parfaitement une spire complète de l'héliçoïde qu'il s'agissait d'obtenir. Je n'ai point figuré le résultat ici, à cause de la difficulté de le bien représenter par la gravure; mais on s'en fera aisément une idée.

Les parties *ba* et *fa* (*fig.* 56) de la courbe forment, en *a*, un angle rentrant, et il est impossible, avec un système solide composé de fils de fer nus, de réaliser une figure d'huile présentant un angle de cette espèce (§31): toujours l'huile passe au delà de l'arête, et vient remplir en plus ou moins grande quantité l'ouverture de l'angle; c'est pour écarter cet inconvénient que l'on entoure de fil de coton le fil de fer droit qui sert d'axe à l'héliçoïde; l'huile ne peut franchir l'obstacle que lui oppose le coton imbibé de liquide alcoolique, et l'angle rentrant se maintient.

§ 133. L'équation différentielle générale des surfaces à courbure moyenne nulle, c'est-à-dire l'équation [3] du § 2 dans laquelle la constante C est égale à zéro, a été, de la part des géomètres, le sujet de nombreux travaux.

Nous allons passer en revue ceux dont la publication a précédé 1870, en nous bornant à ce qui peut offrir de l'intérêt pour notre ouvrage, et nous décrirons en même temps plusieurs vérifications expérimentales.

On se rappellera que les surfaces dont il s'agit sont indifféremment appelées (§ 2) surfaces à courbure moyenne nulle, surfaces à aire minima, et surfaces dont les rayons de courbure, en chaque point, sont égaux et de signes contraires.

Monge a donné le premier [1] une intégrale de leur équation ; mais cette intégrale est d'une forme compliquée, qui en rend l'usage très-difficile.

Cependant M. Scherk, qui s'était déjà occupé de la question dans un premier Mémoire [2] publié vers 1831, l'a reprise en 1835 dans un second travail [3], et, partie au moyen d'une méthode spéciale, partie en traitant l'intégrale de Monge, il parvient à trouver, en coordonnées finies, outre les équations de l'héliçoïde gauche à plan directeur et du caténoïde, déjà connus par les recherches de Meusnier [4], celles de cinq autres surfaces ; voici ces équations :

$$e^{Dz} = \frac{\cos . Dy}{\cos Dx};$$

$$z = bl\frac{\sqrt{\rho^2 + a^2} + \sqrt{\rho^2 - b^2}}{a} - a \operatorname{arc}\left[tg = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{\rho^2 + a^2}{\rho^2 - b^2}}\right] + a\theta + c,$$

où

$$x = \rho\cos\theta, \quad \text{et} \quad y = \rho\sin\theta;$$

$$\frac{1}{2}e^{2z - \frac{y}{x}\sqrt{2\rho + 2t} + x\sqrt{2\rho - 2t}} + \frac{1}{2}e^{-2z + \frac{y}{x}\sqrt{2\rho + 2t} - x\sqrt{2\rho - 2t}} = \rho + \frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{4},$$

où

$$t = 1 + \frac{y^2}{x^2} - \frac{x^2}{4} = \rho\cos\theta, \quad \text{et} \quad y = \rho\sin\theta;$$

$$\frac{1}{2}e^{z + \sqrt{\frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2}t}\,\text{coséc}\,\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}e^{-z - \sqrt{\frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2}t}\,\text{coséc}\,\frac{1}{2}x} = \frac{4\sin^2\frac{1}{2}x + \rho}{y^2},$$

(1) *Sur le calcul intégral des équations aux différences partielles* (MÉM. DE L'ACAD. DES SCIENCES DE PARIS, 1784, p. 118).

(2) *De proprietatibus superficiei quæ hac continetur æquatione : $(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = o$ disquisitiones analyticæ* (ACTA SOCIET. JABLONOVIANÆ, vol. IV, p. 204, Leipzig).

(3) *Bemerkungen ueber die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen* (JOURNAL DE CRELLE, t. XIII, p. 185).

(4) Voir la première note du § 129.

où

$$t = 4\sin^2\frac{1}{2}x + y^2\cos x = \rho\cos\theta, \quad \text{et} \quad y^2\sin x = \rho\sin\theta;$$

$$\sin Dz = \pm\frac{e^{Dx} - e^{-Dx}}{2}\cdot\frac{e^{Dy} - e^{-Dy}}{2}.$$

Ajoutons que l'auteur parvient à déduire de la première de ces équations, cette autre plus générale :

$$e^{Bz\sin(\beta-\alpha)} = A\frac{\cos B[x\cos\alpha + y\sin\alpha + a]}{\cos B[x\cos\beta + y\sin\beta + b]}.$$

Il annonce que, dans un Mémoire ultérieur, il soumettra à une recherche particulière la première des équations ci-dessus, dans ses rapports avec la dernière; j'ignore si ce Mémoire a été publié ; je n'ai pu le trouver.

§ 134. En 1843, M. Björling(1) a cherché, comme M. Scherk, à tirer parti de l'intégrale de Monge; mais il astreint la surface à passer par une courbe donnée, et, pour particulariser cette même surface, il soumet à une loi également donnée la direction de la normale le long de la courbe en question. Sa méthode doit probablement conduire à des équations finies représentant de nouvelles surfaces; mais l'application qu'il choisit comme exemple ne fournit que le caténoïde.

§ 135. M. Ossian Bonnet, en employant un système de coordonnées auxiliaires, est parvenu en 1853 à une intégrale générale(2), qui ne présente pas l'inconvénient de celle de Monge; on pourra, sans doute, déduire de ses formules, en coordonnées ordinaires et sous forme finie, les équations d'un grand nombre de nouvelles surfaces.

(1) *In integrationem æquationis derivatarum partialium superficiei, cujus in puncto unoquoque principales ambo radii curvedinis æquales sunt signoque contrario* (ARCHIVES DE GRUNERT, 1844, vol. IV).

(2) *Note sur la théorie générale des surfaces* (COMPTES RENDUS, t. XXXVII, p. 529).

M. Bonnet signale, comme exemple des résultats qu'on tire de son intégrale, une surface qui, pour certaines valeurs des constantes, se réduit, d'une part, à l'héliçoïde gauche, et, d'autre part, au caténoïde ; cette surface était déjà connue ; c'est celle qui est représentée par la seconde des équations de M. Scherk ; c'est aussi celui des héliçoïdes de M. Lamarle (§ 131) qui correspond au caténoïde.

En 1855 et 1856, M. Bonnet a, en outre, appliqué sa méthode[1] au problème déjà traité par M. Björling ; mais il ne donne non plus l'équation, en coordonnées finies, d'aucune nouvelle surface.

Il a repris ces questions en 1860, dans un Mémoire développé [2] ; il y expose une génération géométrique de la surface mentionnée plus haut ; voici cette génération :

Concevons, dans le plan des xy, l'hyperbole représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

et prenons la partie située du côté des x positifs pour base d'une surface cylindrique parallèle aux z. Sur cette surface traçons une courbe telle que la coordonnée z de l'un quelconque M de ses points soit dans un rapport constant égal à $-\frac{2}{b}$ avec le secteur hyperbolique compté à partir du demi-axe réel qui aboutit au sommet ($x=a$, $y=o$), et terminé au demi-diamètre qui aboutit

(1) *Sur la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans l'équation intégrale des surfaces à aire minima* (COMPTES RENDUS, t. XL, p. 1107). — *Nouvelles remarques sur les surfaces à aire minima* (Ibid., tome XLII, page 532).

(2) *Mémoire sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes* (JOURN. DE M. LIOUVILLE, 2me série, t. V, page 153).

à la projection du point M sur le plan des xy; enfin donnons à cette espèce d'hélice hyperbolique un mouvement héliçoidal direct autour de l'axe des z, de façon que les hélices décrites par ses différents points aient toutes $2\pi b$ pour pas; la surface ainsi obtenue sera la surface cherchée.

§ 136. En 1855, M. Serret a indiqué(1) une transformation de l'intégrale de Monge, qui permet de représenter toutes les surfaces à courbure moyenne nulle passant par des droites données non situées dans le même plan. Son Mémoire, du reste, ne contient pas de nouvelles équations en coordonnées finies.

§ 137. M. Catalan a publié, en 1855 encore(2), deux Notes dans lesquelles il arrive à des surfaces particulières.

La première de ces surfaces coïncide avec la première de celles de M. Scherk; mais M. Catalan en détermine la forme, qu'il décrit de la manière suivante :

La surface dont il s'agit coupe le plan des xy suivant des droites qui font des angles de 45° avec les axes des x et des y, et qui partagent tout le plan en carrés égaux; deux de ces droites se coupent à l'origine des coordonnées. La surface admet, en outre, un système de droites perpendiculaires à ce même plan, et qui divisent en deux parties égales les côtés des carrés ci-dessus. Elle est composée d'une infinité de nappes identiques dont chacune est comprise tout entière entre quatre plans asymptotiques formant un canal à section carrée

(1) *Sur la moindre surface comprise entre des lignes droites données, non situées dans le même plan* (COMPTES RENDUS, tome XL, p. 1078).

(2) *Sur une surface dont les rayons de courbure, en chaque point, sont égaux et de signes contraires* (COMPTES RENDUS, t. XLI, p. 35), et *Sur deux surfaces qui ont, en chaque point, leurs rayons de courbure égaux et de signes contraires* (Ibid., p. 274).

de longueur indéfinie; les arêtes de tous ces canaux sont les droites du dernier système. On peut se représenter la section de l'ensemble de ces mêmes canaux par le plan des xy comme un échiquier indéfini, dans lequel les cases noires répondraient aux canaux renfermant les nappes de la surface, et les cases blanches à des espaces vides; les cases noires contiendraient à leurs centres les sommets des premiers carrés dont il a été question plus haut. Toutes les nappes étant identiques, il suffit d'en considérer une, et nous prendrons celle qui entoure l'axe des z. Elle est coupée par le plan des xz suivant une courbe située tout entière au-dessus de l'axe des x, qui touche cet axe à l'origine, qui a pour axe de symétrie l'axe des z, et qui présente deux branches infinies ayant pour asymptotes les sections du canal rectangulaire par le plan des xz. La même nappe est coupée par le plan des yz suivant une courbe identique à la précédente, mais renversée, et située tout entière au-dessous de l'axe des y, qu'elle touche aussi à l'origine. Si l'on imagine que la première de ces courbes glisse sur la seconde en demeurant parallèle à elle-même, elle engendrera la nappe dont il s'agit. On se fera donc aisément une idée de celle-ci, et comme il est clair que toutes les nappes se relient entre elles par les droites du dernier système ci-dessus, on pourra se figurer l'ensemble de la surface. On voit que chacune des nappes prise isolément a une grande analogie avec le paraboloïde hyperbolique.

La seconde des surfaces de M. Catalan est donnée par un système de quatre équations, entre lesquelles il faudrait éliminer trois quantités; mais cette élimination, si tant est qu'elle soit possible, serait certainement fort difficile. L'équation de la troisième sur-

face coïncide encore avec la deuxième de celles de M. Scherk.

M. Catalan a présenté, en outre, dans la même année, à l'Académie des Sciences de Paris, un Mémoire(1) dans lequel il parvient, d'une autre manière que M. Bonnet, à l'intégrale, sous forme réelle, de l'équation générale. Des solutions qu'il tire de ses calculs, l'une se réduit, par une transformation convenable, à la dernière des équations de M. Scherk; trois autres sont données par des systèmes d'équations entre lesquelles il faudrait effectuer des éliminations difficiles, mais, pour l'une de ces dernières, M. Catalan parvient, sans faire l'élimination, à la génération de la surface, génération que voici :

Concevez une circonférence de cercle roulant sur une ligne droite et dont un point S décrit ainsi une cycloïde; concevez, en outre, la cycloïde enveloppe du rayon mobile passant par le point S, et soit P le point de contact ; imaginez enfin, dans un plan perpendiculaire à celui de ces cycloïdes, une parabole dont la directrice soit projetée en P, et qui ait S pour sommet; cette dernière courbe, variable de grandeur, engendrera la surface.

Enfin, en 1858, a paru le Mémoire in extenso(2) dont les articles que je viens de résumer étaient des extraits développés.

§ 138. J'ai réalisé, toujours par le procédé des lames, une portion de l'une des nappes de la première des surfaces ci-dessus, savoir de celle qui coïncide avec la première de M. Scherk. J'ai choisi une portion terminée à égale distance au-dessus et au-dessous du plan des xy.

(1) *Sur les surfaces dont les rayons de courbure, en chaque point, sont égaux et de signes contraires* (COMPTES RENDUS, t. XLI, p. 1019).

(2) *Mémoire sur les surfaces dont les rayons de courbure, en chaque point, sont égaux et de signes contraires* (JOURN. DE L'ÉCOLE POLYTECHN., 37me cahier, p. 129).

On comprend, par la description de la surface, qu'il suffira de former la charpente solide de quatre fils de fer droits égaux en longueur, disposés comme les quatre arêtes latérales d'un prisme droit à base carrée, et dont les extrémités soient réunies d'une manière convenable par des fils de fer transversaux arqués suivant des courbes déduites de l'équation de la surface. Pour nous exprimer plus nettement, supposons la charpente placée de façon que les quatre fils de fer droits soient verticaux, et que, par rapport à l'observateur, deux de ces fils soient en avant des deux autres; il faudra qu'à la partie inférieure du système, un fil transversal réunisse les extrémités des deux fils verticaux antérieurs, et un autre les extrémités des deux fils verticaux postérieurs, et qu'à la partie supérieure, un fil transversal réunisse l'extrémité du fil vertical antérieur de droite à celle du fil vertical postérieur de droite, tandis qu'un autre réunit de même l'extrémité du fil vertical antérieur de gauche à celle du fil vertical postérieur de gauche. Les milieux des fils transversaux supérieurs seront d'ailleurs réunis par une fourche, afin qu'on puisse tenir la charpente pour la plonger dans le liquide.

La courbure des fils transversaux varie nécessairement avec le rapport entre la hauteur et la largeur de la charpente. J'ai pris d'abord la hauteur égale à la largeur; en d'autres termes, j'ai considéré la portion de la nappe qui s'étend au-dessus et au-dessous du plan des xy d'une quantité égale à la demi-largeur de cette nappe. M. Catalan met l'équation de la surface sous la forme :

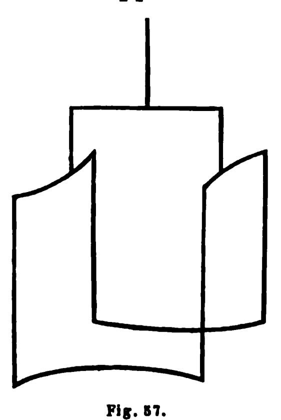
$$z = l\frac{\cos y}{\cos x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad [1]$$

Si, pour plus de simplicité, on considère en particulier la nappe qui entoure l'axe des z, on verra sans peine que,

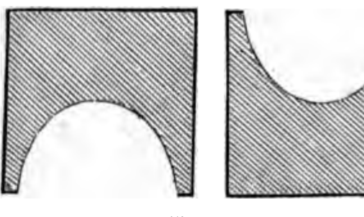
dans l'équation ci-dessus, la demi-largeur de cette nappe est représentée par $\frac{\pi}{2}$; il faudra donc, pour avoir l'équation des courbes qui doivent terminer supérieurement et inférieurement la charpente solide, faire $z = \pm\frac{\pi}{2}$, d'où l'on déduira

$$\cos y = e^{\pm\frac{\pi}{2}} \cdot \cos x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [2]$$

J'ai supposé à la charpente solide une largeur et une hauteur de 9 centimètres ; les courbes ont été dessinées en conséquence d'après l'équation [2], et j'ai fait construire la charpente ; elle est représentée en perspective par la *fig*. 57. Quand on la retire du liquide glycérique, la lame qu'elle contient offre aux yeux la réalisation parfaite de la portion cherchée de la surface. La *fig*. 58 montre, en projection verticale suivant deux directions rectangulaires, le résultat ainsi obtenu.


Fig. 57.

Ici, comme dans le cas de l'héliçoïde gauche à plan directeur (§ 130), la charpente en fil de fer constitue un contour fermé qu'on peut se figurer entièrement tracé sur la surface dont nous nous occupons, et la lame, qui doit passer par tout ce contour et avoir une courbure moyenne nulle, est obligée de se façonner suivant la surface qui remplit cette double condition; c'est


Fig. 58.

donc là encore une application de mon principe général (§ 128).

On peut se demander si la surface se réaliserait de même pour un rapport beaucoup plus grand entre la hauteur et la largeur de la charpente solide ; cette réalisation suppose, en effet, que la nappe, prise ainsi sur une partie plus considérable de son étendue, ne devient point instable. Afin d'essayer la chose, j'ai fait construire une seconde charpente ayant 10 centimètres de hauteur et 2,5 de largeur, c'est-à-dire une hauteur quadruple de la largeur. En cherchant l'équation des portions courbes qui conviennent à ce rapport, ce qui s'obtient en faisant, dans l'équation [1], $z = 2\pi$, j'avais trouvé que ces courbes se réduisaient sensiblement à des lignes droites, de sorte que la nouvelle charpente ne se compose que de parties rectilignes. Or la lame qui s'y est formée n'a point réalisé la surface décrite par M. Catalan : elle a pris une figure consistant encore en deux parties creuses disposées à angle droit l'une par rapport à l'autre ; mais leur sommet commun, au lieu d'être au milieu du système, se trouvait environ quatre fois plus éloigné de l'une des extrémités que de l'autre ; en outre, en répétant l'expérience plusieurs fois, on a vu ce sommet commun se placer tantôt vers l'extrémité supérieure, tantôt vers l'extrémité inférieure. J'ai dû conclure de là que la nappe de la surface décrite par M. Catalan a une limite de stabilité, et que j'avais dépassé cette limite.

L'expérience que je viens de décrire nous offre donc un exemple du cas où la seconde condition énoncée dans le principe général du § 128 n'est pas satisfaite[1].

(1) Bien que je me sois fait une règle de clore mes indications historiques à la fin de 1869, je dirai cependant ici que M. Schwarz, dans une note

Je me suis dit alors qu'on donnerait probablement de la stabilité à la figure cherchée en profitant de la propriété consistant en ce que la nappe contient, comme on l'a vu, deux droites dirigées suivant les diagonales de la section du canal rectangulaire par le plan des *xy* ; j'ai pensé qu'en rendant solide l'une de ces diagonales, on obligerait le sommet commun des deux parties creuses à demeurer au centre du système. J'ai donc fait adapter, au milieu de la hauteur de la nouvelle charpente, un fil de fer très-mince qui traverse celle-ci, comme on le voit dans la *fig.* 59, et, en effet, par ce moyen, la surface de MM. Scherk et Catalan s'est parfaitement réalisée dans la charpente en question.

Fig. 59.

§ 139. M. Van der Mensbrugghe, appliquant, de son côté, mon principe général, a réalisé [1], en 1866, la cinquième des surfaces de M. Scherk. La discussion de l'équation lui a montré que la charpente la plus simple à employer devait se composer de deux rectangles égaux ayant leurs grands côtés quadruples des petits, et se coupant à angles droits par les milieux de ces grands côtés (*fig.* 60). A la rigueur, les petits côtés devraient être courbes ; mais, avec le

annexée à son Mémoire publié en 1871 (voir le n° 13 du § 508), considère cette instabilité comme due à ce que la charpente étant formée de fils d'une épaisseur notable, et présentant nécessairement de petites irrégularités, la surface en question ne saurait s'y réaliser rigoureusement ; sans ces imperfections de la charpente, la surface, avec son sommet au milieu, serait, selon M. Schwarz, en conséquence d'une démonstration mathématique, parfaitement stable. S'il en est réellement ainsi, l'instabilité que j'ai constatée appartiendrait, non à la surface de M. Scherk, mais à une autre surface qui en serait très-voisine.

(1) *Discussion et réalisation expérimentale d'une surface particulière à courbure moyenne nulle* (BULLET. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, 2me série, t. XXI, p. 552).

rapport ci-dessus, leur courbure serait si faible, qu'on peut les laisser droits sans qu'il en résulte de différence appréciable entre la surface laminaire produite et la surface théorique ; cela tient à ce que les plans des rectangles sont asymptotiques de cette dernière.

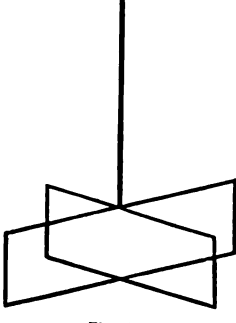


Fig. 60.

La charpente ainsi construite ne représente pas un seul contour fermé, comme le voudrait mon principe, mais bien l'ensemble de deux de ces contours ; et ceux-ci ne sont pas les deux rectangles eux-mêmes, car on s'assure aisément, par la discussion, qu'aucun de ces derniers ne satisfait à la condition, exigée par mon principe, de circonscrire une portion finie de la surface. Si l'on considère isolément la partie de la charpente composée d'une moitié de l'un des rectangles et d'une moitié de l'autre, on aura le premier des deux contours fermés réels, et la partie opposée sera le second ; et, en effet, quand on retire la charpente du liquide glycérique, c'est dans ces deux parties opposées que se trouve logée la figure laminaire.

Ces mêmes parties comprennent, on le voit, deux des quatre angles dièdres droits formés par les rectangles, et il est clair qu'il n'y a pas plus de raison pour que la figure laminaire se développe dans ces deux angles que dans les deux autres ; aussi, quand la charpente est bien construite, et qu'on répète plusieurs fois l'expérience, c'est tantôt l'un des couples d'angles opposés, tantôt l'autre, qui se trouve occupé.

La charpente s'écartant de mon principe en ce qu'elle présente deux contours fermés au lieu d'un seul, le

système laminaire réalisé contient une lame supplémentaire ; celle-ci est plane, elle a la forme d'un ovale dont les sommets sont aux deux points d'intersection des rectangles, et dont le plan est bissecteur des deux angles dièdres qui renferment toute la figure ; pour obtenir le résultat que l'on cherche, c'est-à-dire une portion de la surface de M. Scherk, il suffit de crever la lame supplémentaire dont je viens de parler ; la figure laminaire offre alors en son milieu un espace vide, et c'est aussi ce qu'on déduit de l'équation.

On pourrait façonner séparément un seul des deux contours fermés, de sorte qu'on se trouverait rigoureusement dans les conditions de mon principe ; alors il ne se formerait qu'une lame unique, et celle-ci représenterait exactement la moitié de la figure que fournit la charpente entière après la rupture de la lame additionnelle ; si M. Van der Mensbrugghe a réuni les deux contours fermés, c'est afin de réaliser une portion plus complète de la surface. Il s'est assuré d'ailleurs, par des mesures au cathétomètre, que la lame produite coïncidait, sans erreur appréciable, avec la surface théorique.

Enfin il a poursuivi, au moyen de l'équation, la surface au delà des grands côtés des rectangles, et il a fait voir comment on pouvait étendre la réalisation hors des mêmes limites, à l'aide d'une charpente convenable munie de fils supplémentaires, sans lesquels la figure ainsi agrandie serait instable ; le résultat est fort curieux, mais sa description exigerait trop de place.

§ 140. M. Mathet a fait connaître (1), en 1863, une méthode au moyen de laquelle on peut former l'équation

(1) *Étude sur un certain mode de génération des surfaces d'étendue minimum* (Journal de M. Liouville, 2me série, t. VIII, p. 323).

différentielle de toutes les surfaces à courbure moyenne nulle qui passent par une courbe plane donnée.

§ 140bis. Dans un Mémoire (1) de l'année 1864, M. Enneper a exposé une méthode nouvelle pour l'intégration de l'équation générale des surfaces à courbure moyenne nulle, et il en déduit, comme application, l'équation algébrique suivante :

$$\left[k^2\cdot\frac{y^2-x^2}{z}+\frac{2}{3}+\frac{8}{9}k^4z^2\right]^3=6\left[k^2\cdot\frac{y^2-x^2}{2z}+\frac{2}{9}-k^4\left(x^2+y^2+\frac{8}{9}z^2\right)\right]^2.$$

La surface représentée par cette équation contient deux droites situées dans le plan des xy, et bissectrices des angles entre les axes des x et des y.

§ 141. En 1865, M. Schwarz a communiqué à l'Académie de Berlin une Note (2) dans laquelle il résume une partie des résultats qu'il a obtenus à l'égard d'une surface particulière à aire minima. Cette surface est astreinte à passer par le contour formé de quatre arêtes d'un tétraèdre régulier, choisies de manière à constituer un quadrilatère gauche. M. Schwarz a réalisé, à l'état laminaire, la portion comprise dans ce contour, au moyen d'une solution de gélatine : la lame, devenue solide par l'évaporation de l'eau, lui a donné ainsi une figure permanente.

Cette figure est, comme on devait s'y attendre, en forme de selle ; outre les côtés du quadrilatère gauche, elle admet deux autres droites encore, savoir celles qui joindraient respectivement le milieu de chacun de ces côtés au milieu du côté opposé. Enfin M. Schwarz par-

(1) *Analytisch-geometrische Untersuchungen* (ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK DE SCHLÖMILCH, 9me année, p. 96).

(2) *Ueber die Minimumsfläche, deren Begrenzung als ein von vier Kanten eines regulären Tetraëders gebildetes windschiefes Viereck gegeben ist.* (BULLET. DE L'ACAD. DE BERLIN, séance du 6 Avril).

vient à poursuivre la surface au delà du contour indiqué, et à en déterminer la disposition générale : la surface totale est formée de portions identiques à celle ci-dessus, juxtaposées d'une certaine façon, et elle est fort curieuse (1).

§ 142. Un Mémoire posthume de Riemann (2), publié en 1867, contient une recherche générale des surfaces à aire minima passant par plusieurs lignes limites. L'auteur applique sa méthode d'abord au cas où ces limites sont des droites, dont plusieurs peuvent se couper, par exemple en formant un quadrilatère gauche ; puis à celui où les limites sont deux circonférences de cercle quelconques situées d'une manière quelconque dans des plans parallèles. Ses résultats sont exprimés par des systèmes d'équation renfermant des intégrales indiquées, et il ne donne l'équation complète d'aucune surface en coordonnées finies.

§ 143. En 1867 également, dans un Mémoire couronné par l'Académie de Berlin (3), M. Schwarz a repris le problème de la surface à aire minima passant par quatre

(1) M. Schwarz a eu l'obligeance de m'envoyer des modèles en plâtre de portions étendues de la surface en question. On comprendra de la manière suivante le contour de l'un de ces modèles : qu'on trace un hexagone régulier, supposé horizontal pour fixer les idées ; que, dans le même plan, on construise, sur chacun des côtés comme base, un triangle équilatéral ayant son sommet en dehors de l'hexagone ; qu'on imagine trois de ces triangles, non adjacents, tournant autour de leurs bases comme charnières, jusqu'à ce que chacun d'eux fasse, avec le plan de l'hexagone et au-dessus de celui-ci, un angle égal aux angles dièdres d'un tétraèdre régulier ; qu'on imagine de même les trois autres triangles tournant autour de leurs bases de la même quantité que les premiers, mais au-dessous du plan de l'hexagone ; enfin qu'on supprime les bases de tous les triangles, on aura le contour cherché ; je l'ai fait construire en fil de fer, et j'ai réalisé ainsi parfaitement, avec du liquide glycérique, la portion comprise de la surface discutée par M. Schwarz.

(2) *Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung.* (Mém. de Göttingue, vol. XIII).

(3) *Mém. de l'Acad. de Berlin pour l'année* 1867, introduction historique, page IX.

droites qui forment un quadrilatère gauche; mais, dans la première partie de ce Mémoire, il traite un cas plus général que dans sa communication de 1865 : les côtés du quadrilatère n'appartiennent plus à un tétraèdre régulier; seulement deux côtés adjacents sont égaux entre eux, et les deux autres sont de même égaux entre eux. Dans la seconde partie, l'auteur trouve, pour le cas spécial du tétraèdre régulier, que l'équation finie de la surface est exprimée rationnellement par des fonctions elliptiques des coordonnées. Il traite de même une seconde surface qu'il fait dériver de la première par une flexion de celle-ci; enfin il a joint à son travail des modèles en plâtre de chacune de ces deux surfaces. Le Mémoire in-extenso n'était pas encore imprimé à la fin de 1869.

Le même savant a présenté, en 1867 et 1868, sur les surfaces à aire minima, d'autres Mémoires qui n'étaient pas non plus imprimés à la fin de 1869, et qui renferment des résultats fort remarquables ; il a bien voulu me donner communication des principaux, en m'autorisant à les mentionner. Voici ceux qui m'ont paru offrir le plus d'intérêt :

1° Lorsqu'une surface à aire minima est telle qu'on peut y concevoir tracée une ligne droite, il y a symétrie par rapport à celle-ci, en ce sens que si l'on considère à part toute la portion de la surface qui s'étend d'un côté de la droite, et qu'on la fasse tourner de 180° autour de cette droite comme axe, on obtient la portion située de l'autre côté. C'est ce qu'on vérifie aisément, par exemple, à l'égard de l'héliçoïde gauche à plan directeur, de la première des surfaces discutées par M. Catalan (§ 137), et de celle que M. Van der Mensbrugghe a partiellement réalisée (§ 139).

Une conséquence immédiate de ce beau théorème, c'est

que si l'on réalise une figure laminaire au moyen d'un contour solide fermé qui ne se compose que de lignes droites, on peut prolonger idéalement la surface au delà de ce contour : c'est ainsi, par exemple, qu'on trouve ce que devient, à l'extérieur du quadrilatère gauche, la surface qui s'appuie sur les côtés de celui-ci.

2° On peut déterminer complétement, par les fonctions elliptiques, la surface qu'on réalise partiellement en soulevant hors du liquide glycérique, parallèlement à la surface de ce dernier, un carré en fil de fer, et en s'arrêtant à une hauteur moindre que celle où la figure se modifierait spontanément (1).

On détermine de même, à l'aide des fonctions elliptiques, la surface partiellement réalisée par M. Van der Mensbrugghe, dans le cas où le rapport entre la longueur commune des deux rectangles solides et leur hauteur est quelconque, grand ou petit.

(1) Je ne puis résister au désir d'énoncer, à propos de cette surface, un second théorème trouvé par M. Schwarz, théorème aussi remarquable que le précédent, mais qui, je crois, n'a pas été publié; le voici :

Lorsqu'une surface à courbure moyenne nulle peut être coupée par un plan de telle manière que, tout le long de la section, elle ait ses éléments perpendiculaires à ce plan, elle présente, par rapport à celui-ci, la symétrie qui existe entre un objet posé sur un miroir plan et l'image de cet objet.

Ce théorème est applicable à la surface dont il s'agit, car lorsqu'on a soulevé le carré en fil de fer, les éléments de la lame sont tous verticaux le long de la crête de la petite masse qui la rattache au liquide, et sont conséquemment perpendiculaires au plan horizontal qui passerait par cette crête. Si maintenant l'on considère que la surface contient les quatre droites dont les côtés du carré font partie, on voit qu'on peut lui appliquer également le premier théorème, et l'on arrive de la sorte à la concevoir dans tout son ensemble indéfini. Prise ainsi dans sa totalité, elle jouit de cette propriété singulière que, si on l'envisage comme appartenant à une masse liquide, l'espace qu'elle laisse vide constitue, en creux, une figure identique à celle de l'espace plein.

Les deux théorèmes de M. Schwarz procurent donc une merveilleuse facilité pour la prolongation d'un grand nombre de surfaces à courbure moyenne nulle au delà des limites données.

Enfin M. Schondorff a traité, de son côté, dans un Mémoire (1) couronné aussi en 1867, mais par la Société de Göttingue, la question de la surface à aire minima qui s'appuie sur un quadrilatère gauche ; ce quadrilatère est astreint à la même condition que celui de M. Schwarz.

§ 143bis. En 1867 encore, M. Enneper a donné (2) l'équation suivante :

$$\cos bz = k^2 \cdot \frac{e^{\frac{bx}{k}} + e^{-\frac{bx}{k}}}{2} - k'^2 \cdot \frac{e^{\frac{by}{k'}} + e^{-\frac{by}{k'}}}{2}.$$

Cette équation, si l'on y fait $k = k' = \frac{1}{\sqrt{2}}$, peut être mise sous la forme :

$$4 \cos bz = \left(e^{\frac{b(x-y)}{\sqrt{2}}} - e^{-\frac{b(x-y)}{\sqrt{2}}}\right)\left(e^{\frac{b(x+y)}{\sqrt{2}}} - e^{-\frac{b(x+y)}{\sqrt{2}}}\right),$$

et si, dans cette dernière, on fait $\frac{x-y}{\sqrt{2}} = x'$, $\frac{x+y}{\sqrt{2}} = y'$, et $bz = \frac{\pi}{2} - bz'$, ce qui revient à faire tourner de 45° les plans des xz et des yz, et à déplacer l'origine, sur l'axe des z, d'une quantité égale à $\frac{\pi}{2b}$, on retrouve la dernière des équations de M. Scherk (§ 133) ; l'équation de M. Enneper est donc une généralisation de celle-ci. Je dois cette remarque, et l'indication des transformations ci-dessus, à l'obligeance de M. Schwarz.

§ 144. C'est ici le lieu de décrire deux vérifications expérimentales qui me paraissent dignes d'intérêt. Il est permis d'inférer des recherches des géomètres que, par un contour déterminé quelconque, peuvent passer une

(1) *Ueber die Minimalfläche die von einem doppelt-gleichschenkligen räumlichen Viereck begrenzt wird.* Göttingue, 1868.

(2) *Analytisch-Geometrische Untersuchungen* (Bullet. de la Soc. Roy. de Göttingue, 1867, p. 277).

infinité de surfaces à courbure moyenne nulle, du moins lorsqu'on n'introduit aucune autre condition. D'après cela, si l'on construit, en fil de fer légèrement oxydé, un contour fermé non plan et de telle forme qu'on voudra, qu'on le plonge dans le liquide glycérique et qu'on l'en retire, on doit croire qu'une surface de ce genre pourra toujours s'y réaliser à l'état laminaire, et que, par conséquent, on devra le trouver occupé par une lame unique qui le remplit entièrement.

Or c'est ce que l'expérience confirme : j'ai fait façonner en fil de fer les contours fermés les plus divers et les plus bizarres, et, à leur émersion du liquide glycérique, chacun d'eux s'est toujours montré, soit immédiatement, soit après une petite manœuvre dont je vais parler, rempli en totalité par une seule lame.

Quand le contour fermé a une certaine complication, la lame qui s'y développe est souvent accompagnée de lamelles additionnelles ; mais il suffit alors de crever celles-ci, ce qui se fait aisément avec une pointe de papier à filtre, pour ne plus avoir qu'une lame unique.

Quelquefois aussi une portion de la lame prend, pendant que le système sort du liquide, une mauvaise direction, et va s'attacher, au moyen d'une arète liquide, à une autre portion de cette même lame ; dans ce cas, on ne peut crever ; mais, en variant la position du contour solide pendant qu'on le retire, on finit par éviter l'inconvénient dont il s'agit. Avec ces précautions, on réussit constamment à réaliser une lame unique attachée à la totalité du contour solide, et l'on produit ainsi, par un moyen fort simple, des surfaces très-belles et très-variées.

Pour donner une idée de la singularité et de la complication des contours fermés que j'ai soumis à l'expérience, j'en décrirai ici deux en peu de mots : le premier

consiste en un nœud semblable à celui qu'on ferait au milieu d'un cordon sans le serrer, de manière que ses différentes parties soient notablement distantes les unes des autres, et en rejoignant les deux extrémités libres. Quant au second, le fil de fer, d'abord droit et vertical, se recourbe ensuite en formant un peu plus de deux spires d'une hélice dont l'axe est parallèle à la portion droite, puis se contourne en une autre hélice également de deux spires, dont l'axe est horizontal, et qui enveloppe la première à une distance suffisante ; il s'arrondit alors en une troisième hélice de deux spires aussi, à axe vertical entourant le système des deux autres avec un intervalle convenable ; enfin il va s'attacher en un point du fil droit, et ferme ainsi le contour. C'est avec ce dernier contour que la réussite a été le plus difficile : il se formait des lamelles dont la disposition était telle qu'on ne pouvait les crever sans faire éclater le tout, et ce n'est qu'en variant la manière dont on retirait le contour du liquide, qu'on est arrivé au résultat cherché.

§ 145. En second lieu, bien que, avec un contour donné, la surface laminaire qu'on réalise ainsi se montre toujours la même dans les essais successifs convenablement effectués, l'expérience permet encore de constater qu'il y a une infinité d'autres surfaces à courbure moyenne nulle qui peuvent s'appuyer sur le même contour. Si, après avoir réalisé une lame dans un contour fermé non plan et choisi arbitrairement, on fait adhérer à cette lame un anneau en fil de fer muni d'une fourche par laquelle on le tient, et préalablement mouillé de liquide glycérique, puis qu'on tire cet anneau dans une direction perpendiculaire à son plan, comme si on voulait l'écarter de la lame, celle-ci ne s'en détache pas, de sorte qu'elle s'étend alors entre le contour primitif et ce

même anneau; seulement, si l'on éloigne trop ce dernier, l'équilibre se détruit, la portion de la lame qui aboutit à l'anneau s'étrangle rapidement, il y a séparation, et la lame se rétablit dans son état antérieur, tandis qu'une lame plane va occuper l'anneau; mais, en deçà de cette limite d'écartement, la figure est parfaitement stable.

Or, dans cette dernière condition, comme la lame continue à s'appuyer sur le contour primitif et que sa forme est modifiée, elle représente une nouvelle surface à courbure moyenne nulle passant par ce même contour. On peut employer simultanément deux anneaux qu'on fait adhérer à deux portions différentes de la lame et qu'on écarte en même temps, la lame s'étend vers l'un et vers l'autre à la fois; on peut, en outre, substituer aux anneaux circulaires des anneaux de tout autres formes, et toujours l'expérience réussit. On produit de cette manière autant de surfaces différentes qu'on le veut, et qui toutes passent par le premier contour.

Si l'on conçoit, par la pensée, l'une de ces nouvelles surfaces prolongée au delà de l'un des anneaux, on se convaincra, avec un peu de réflexion, que, puisque ses deux rayons de courbure principaux doivent être partout égaux et de signes contraires, le prolongement dont il s'agit ne peut se fermer, et doit conséquemment s'étendre à l'infini. Il résulte de là qu'aucune de ces surfaces ne saurait remplir le contour primitif par une portion finie.

Mais les résultats du paragraphe précédent permettent d'énoncer ce nouveau principe : Un contour fermé absolument quelconque, plan ou non plan, étant donné, parmi toutes les surfaces à courbure moyenne nulle qui peuvent s'appuyer sur sa totalité, il y en a toujours au moins une dont une portion finie peut le remplir entièrement.

CHAPITRE V.

Tension des surfaces et des lames liquides : historique. — Systèmes laminaires. Lois auxquelles ils sont soumis ; comment ils se développent ; principe général qui régit leur constitution. Démonstration théorique de leurs lois.

§ 146. La couche superficielle des liquides possède une propriété singulière consistant en ce qu'elle se trouve dans un état continuel de tension, et, par suite, fait incessamment effort pour se contracter. Afin de mettre dans tout son jour cette propriété, qui joue un grand rôle dans les phénomènes dont nous nous occupons, nous allons en tracer l'historique jusqu'à la fin de 1869.

L'idée d'une tension dans la couche superficielle des liquides a été émise, pour la première fois, je pense, en 1751, par Segner, qui l'emploie surtout à la détermination de la figure des gouttes. Dans le Mémoire dont j'ai déjà parlé (note du § 3), Mémoire fort remarquable pour l'époque où il a été écrit, Segner considérant une goutte liquide posée sur une surface solide qu'elle ne mouille pas, discute les actions mutuelles des molécules qui la composent, et arrive à des résultats dont la vérité est aujourd'hui démontrée : il trouve que les actions d'où dépend la figure de la goutte résident dans une couche superficielle dont l'épaisseur est égale au rayon de l'attraction moléculaire, et que ces mêmes actions produisent des pressions normales dont l'intensité est d'autant plus grande qu'elles émanent de portions plus courbes de la surface ; enfin il conclut à l'existence, dans la couche

dont il s'agit, d'une tension ayant partout la même intensité, tension qu'il fait dériver des attractions des molécules suivant le sens tangentiel, et de la courbure. Mais cette discussion, toute de raisonnement, est longue, embarrassée, peu intelligible, selon moi, en plusieurs points, et je doute qu'elle ait pu convaincre personne de la réalité de la tension; elle renferme, en outre, des erreurs qui tiennent à l'insuffisance des notions qu'on possédait alors; aussi Young dit-il à ce sujet : « Segner..... a montré de quelle manière le principe peut être déduit de la doctrine de l'attraction; mais sa démonstration est compliquée et n'est pas parfaitement satisfaisante. »

Quoi qu'il en soit, Segner, appliquant ensuite à ses déductions une méthode ingénieuse de calcul et d'expérience, parvient à cet autre résultat, que, dans des gouttes formées du même liquide, mais ayant des figures et des dimensions différentes, la tension a la même valeur, ce qui revient à dire qu'elle est indépendante des courbures; ce principe est également reconnu vrai aujourd'hui.

Enfin, Segner va jusqu'à chercher le rapport entre la tension du mercure et celle de l'eau, et il le trouve égal à 3,5 environ; mais comme il manque de la notion de la courbure moyenne, et ne tient compte, dans ses calculs, que de la courbure méridienne, ses résultats numériques sont nécessairement inexacts, et le rapport ci-dessus est beaucoup trop petit.

§ 147. En 1756, Leidenfrost (1) a signalé la force contractile des bulles de savon; il se fonde sur le fait qu'il a, je pense, décrit le premier, que si on laisse ouvert le tube d'insufflation, la bulle revient graduellement sur

(1) *De aquae communis nonnullis qualitatibus tractatus*. Duisburg.

elle-même jusqu'à s'annuler, en expulsant par le tube l'air qu'elle contient.

Mais Leidenfrost ne rapporte pas cette force contractile à une propriété générale des surfaces liquides; il l'attribue à la partie graisseuse du savon, laquelle, selon lui, se sépare des autres éléments de la solution, et constitue une pellicule mince sur la face extérieure de la bulle; d'ailleurs, selon lui encore, la partie aqueuse de la lame possède une force de nature opposée, savoir une force explosive; c'est cette dernière qui fait éclater la bulle.

Monge[1], en 1787, parle de la tension, mais d'une manière simplement hypothétique; il avance qu'elle pourrait servir à rendre raison des phénomènes capillaires.

§ 148. Young, dans un travail célèbre[2], publié en 1805, part du principe de la tension pour expliquer un grand nombre de phénomènes capillaires. Il ne tombe pas dans la même erreur que Segner, c'est-à-dire qu'il considère à la fois les effets des deux courbures rectangulaires : la tension détermine, en chaque point de la surface liquide, une pression ou une traction normale proportionnelle à la somme de ces deux courbures, et c'est de là que naissent les phénomènes : dans un tube capillaire, par exemple, lorsque le liquide est soulevé et présente ainsi une surface concave, les tractions normales dues à la tension soutiennent le poids de la colonne, et lorsque le liquide est déprimé, sa surface étant alors convexe, les pressions normales produites par la tension font équilibre à la pression hydrostatique du liquide environnant, qui tend à faire monter la colonne.

Quant à la légitimité du principe de la tension, Young

(1) *Mémoire sur quelques effets d'attraction ou de répulsion apparente entre les molécules de matière* (Mém. de l'Acad. des Sc. de Paris).

(2) *An essay on the cohesion of fluids* (Philos. Transact., 1805).

s'appuie simplement sur ce que les phénomènes capillaires, pouvant être rapportés aux attractions mutuelles des seules particules superficielles, les surfaces liquides « doivent être composées de courbes de la nature de la chaînette, lesquelles sont supposées être le résultat d'une tension uniforme dans une surface qui résiste à la pression d'un fluide. » Enfin il essaie de faire voir qu'on peut trouver une cause de pressions et tractions normales dans le seul jeu des attractions et répulsions des molécules, et il laisse ainsi dans le doute si la tension existe en réalité, ou si, par l'effet de ces actions normales, les choses se passent comme sous l'influence d'une tension.

Laplace (1) rappelle les recherches de Segner et de Young, mais il signale l'inexactitude des raisonnements du premier, et fait remarquer que le second n'a pas tenté de dériver ses hypothèses de l'attraction moléculaire.

§ 149. Le docteur Hough, dont j'ai déjà mentionné (§ 118) les recherches, publiées en 1830, paraît être arrivé, de son côté, sans connaître les travaux de Segner et de Young, à l'idée d'une force contractile ou tension existant à la surface des liquides et faisant constamment effort pour amoindrir cette surface; il semble y avoir été conduit simplement par la considération de la forme sphérique des gouttes liquides et des bulles de savon. Il donne comme exemple des effets de cette tension l'élasticité des globules de mercure, lesquels, lorsqu'on augmente leur surface en les comprimant et qu'on les abandonne ensuite à eux-mêmes, reprennent la forme sphérique.

(1) *Exposition du système du monde*. Paris. — La première édition est de 1796; mais les remarques de Laplace étant postérieures au travail de Young, ont dû être insérées pour la première fois dans une édition moins ancienne; celle que j'ai consultée est de 1813.

Pour expliquer la tension, Hough fait remarquer que les molécules de la surface ne sont pas en présence de molécules extérieures de même espèce qui puissent contrebalancer leurs attractions mutuelles, tandis qu'à l'intérieur du liquide chaque molécule étant complétement entourée de molécules similaires, les attractions sont neutralisées dans tous les sens. Il ajoute qu'on peut, jusqu'à un certain point, estimer les tensions relatives des différents liquides, en comparant les grandeurs des plus grosses gouttes de ces liquides qui conservent sensiblement la forme sphérique quand elles reposent sur des substances qui ont pour elles la moindre attraction, ou quand elles sont suspendues à des corps qui ont pour elles la plus forte attraction.

Il fait dépendre aussi de la force contractile l'élévation et la dépression des liquides dans les espaces capillaires, ainsi que les attractions et répulsions apparentes des corps légers flottants ; mais, ignorant les recherches antérieures, il essaie d'établir une théorie de ces phénomènes, théorie erronée, dans laquelle intervient la pression atmosphérique. Enfin il admet, comme conséquence de la tension, une pression exercée soit sur l'air qui constitue une bulle dans l'intérieur d'un liquide, soit sur celui que renferme une sphère laminaire ou une calotte sphérique laminaire; mais, ainsi que je l'ai dit, il parvient, à l'égard de la relation entre cette pression et le diamètre, à une loi tout à fait inexacte.

§ 150. Disons quelques mots d'un Mémoire(1) de Mile, qui a paru en 1838. L'auteur expose une théorie des phénomènes capillaires, dans laquelle il fait aussi intervenir la tension; mais, telle qu'il la considère, cette

(1) *Versuch einer neuen physikalischen Theorie der Capillarität* (ANN. DE M. POGGENDORFF, vol. XLV, pp. 287 et 501).

tension obéirait à des lois aujourd'hui inadmissibles. Il part de ce principe que, dans un liquide homogène, les molécules cherchent à s'arranger d'une manière régulière et identique partout; or il montre que cette identité est possible uniquement quand la surface du liquide est plane, et il en conclut que, par suite de l'arrangement anormal des molécules, les surfaces courbes font constamment effort pour devenir planes; que cet effort, d'où résultent des tensions, est d'autant plus énergique que les courbures sont plus prononcées, que ce même effort détermine, sur la masse, une pression dans le cas des surfaces convexes, et une traction dans le cas des surfaces concaves; enfin que de là naissent les phénomènes capillaires. Suivant Mile, on le voit, la tension n'existerait que dans les surfaces courbes, et elle varierait avec les courbures.

§ 150bis. Mossotti, dans un ouvrage[1] de l'année 1843, applique, comme Young, mais d'une manière plus complète, le principe de la tension aux phénomènes capillaires. Il établit l'indépendance entre la tension et les courbures, et l'on peut conclure de son analyse que le coefficient constant qui, dans l'expression générale de la pression capillaire, multiplie la somme $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$ des deux courbures principales, n'est autre chose que la tension par unité de longueur, c'est-à-dire l'effort exercé par la couche superficielle du liquide des deux côtés d'une section normale dont la longueur est l'unité. Ses formules permettent d'évaluer cette tension, pour un liquide donné, en fonction de la densité de celui-ci et de la hauteur à laquelle il s'élève dans un tube capillaire de diamètre

(1) *Lezioni elementari di Fisica matematica*. Florence.

déterminé, et Mossotti est, je pense, le premier qui ait cherché de semblables évaluations ; il trouve ainsi, par exemple, les valeurs suivantes, qui expriment, pour différents liquides, la tension en milligrammes par millimètre de longueur :

eau	7,56,
mercure	44,40,
alcool	2,59,
essence de térébenthine	2,86,
huile d'olive	3,46;

seulement il ne donne aucune indication concernant la température.

Enfin il admet l'existence d'une tension à la surface commune de deux liquides en contact qui ne se mèlent pas, il la fait entrer dans ses formules relatives aux liquides superposés dans un même tube capillaire, et il obtient, en partant des mesures prises dans ces cas de superposition, les évaluations qui suivent :

huile et eau	0,79,
mercure et eau	37,67,
mercure et alcool	36,04.

Quant à la cause de la tension, Mossotti, en considérant le jeu des actions attractives et répulsives entre les molécules, arrive à une conclusion identique à celle de Poisson, savoir que, à partir de la surface jusqu'à une profondeur très-minime, égale au rayon d'activité de l'attraction moléculaire, la densité est inférieure à celle de l'intérieur du liquide, et il admet que, de cet écartement plus grand des molécules résulte, dans la couche dont il s'agit, un excès d'attraction dans le sens parallèle à la surface; c'est cet excès qui, selon lui, constitue la tension.

§ 151. C'est du principe de la tension que M. Henry,

dans sa communication verbale (année 1844) sur la cohésion des liquides (§ 116), déduit la cause de la pression d'une bulle creuse sur l'air emprisonné, et la loi qui régit cette pression (ibid.). Seulement il considère la bulle comme pouvant être assimilée à une sphère pleine réduite à sa surface pressante, c'est-à-dire qu'il attribue le phénomène à la tension de la face extérieure de la lame, sans tenir compte de celle de l'autre face.

Il ajoute : « On manifeste aisément la force contractile de la surface de la bulle en soufflant une grosse bulle à l'extrémité d'un large tube (soit d'un pouce de diamètre); dès qu'on éloigne la bouche, on voit la bulle diminuer rapidement, et en même temps un courant d'air intense est chassé par le tube contre le visage. Cet effet n'est pas dû à l'ascension de l'air chaud des poumons qui a servi à gonfler la bulle, car il se produit de même quand on emploie de l'air froid, et aussi quand on tient la bulle verticalement au-dessus du visage, de sorte que le courant soit descendant. »

Il est, en effet, impossible de concevoir ce retrait de la lame et cette expulsion de l'air intérieur, sans admettre que la lame soit tendue ; le fait sur lequel s'appuie M. Henry peut donc être regardé comme une preuve expérimentale de la réalité de la tension, au moins dans les lames.

§ 152. Dans un travail (1) de 1845, M. Hagen applique, comme Young et Mossotti, d'une manière rigoureuse aux phénomènes capillaires le principe de la tension, bien qu'il ne considère cette force que comme hypothétique, et il arrive à plusieurs des résultats déjà donnés par Mossotti.

(1) *Ueber die Oberfläche der Flüssigkeiten.* (Mém. de l'Acad. de Berlin, 1845, et Ann. de M. Poggendorff, 1846, vol. LXVII, pp. 1 et 152).

Prenant pour point de départ la seule condition qu'il doit y avoir équilibre entre les actions hydrostatiques et la tension, il démontre mathématiquement l'uniformité de cette dernière force dans deux cas simples, savoir celui d'un liquide soulevé ou abaissé entre deux plans solides, et celui d'un liquide soulevé ou abaissé dans un tube cylindrique.

M. Hagen cherche, par trois procédés différents, la valeur de la tension à la surface de l'eau. En premier lieu, il effectue une série de mesures de l'élévation du liquide entre deux plans verticaux parallèles, dont il fait varier la distance dans des limites étendues. Par des moyens qu'il indique, il détermine chaque fois, dans une section verticale perpendiculaire aux deux plans, l'écartement de ceux-ci, la hauteur du point le plus bas de la surface liquide comprise entre eux, et celle des points où cette surface vient les toucher; puis, appliquant à ces trois éléments une méthode rigoureuse de calcul, il en tire une valeur de la tension.

En second lieu, il mesure également l'élévation de l'eau dans des tubes cylindriques dont le diamètre intérieur varie de $1^{mm},23$ à $3^{mm},42$, et, par un calcul également précis, il en déduit encore la tension. Ce second procédé lui fournit des résultats plus concordants que le premier, et il en tire, en moyenne, pour la température de 10°, une valeur qui, traduite en milligrammes pour un millimètre de longueur, est égale à 7,53.

Il constate, en même temps, qu'une variation de quelques degrés dans la température est sans influence sensible sur la tension.

Le troisième procédé est fondé sur l'écoulement du liquide goutte à goutte : la tension est égale au poids d'une goutte divisé par le périmètre extérieur de l'orifice.

Le poids d'une goutte s'obtient en recevant un nombre déterminé de ces gouttes dans un petit vase, et pesant le liquide recueilli. M. Hagen fait remarquer que ce procédé est moins exact que les précédents, parce que chaque goutte, en se détachant, laisse à l'orifice une petite portion de son volume.

Les mesures ci-dessus conduisent le physicien allemand à cette conclusion singulière, que la tension de l'eau va en décroissant jusqu'à une certaine limite, quand le liquide demeure exposé à l'air : la valeur 7,53 correspond à une surface fraîche.

Enfin M. Hagen reproduit l'opinion, déjà ancienne, que la couche superficielle des liquides a moins de mobilité que l'intérieur; selon lui, et contrairement aux idées de Poisson, cette couche est plus dense que le reste, et il attribue la tension à ce que les molécules étant ainsi plus rapprochées, elles s'attirent avec plus d'énergie. Nous reviendrons sur ces idées.

L'année d'après, le même savant a donné à ce Mémoire une suite(1) où il reprend la mesure des tensions. Il détermine d'abord, par le procédé de l'élévation entre deux plans parallèles, la tension de l'eau qui a séjourné pendant plusieurs heures dans un vase ouvert, et la valeur qu'il trouve, rapportée au millimètre(2), n'est plus que de 4,69, au lieu de 7,53 qui correspond à une surface fraîche; ainsi se confirme le fait de la diminution progressive de la tension de l'eau.

(1) *Mém de l'Acad. de Berlin*, 1846, et *Ann. de M. Poggendorff*, 1849, vol. LXXVII, p. 449.

(2) Dans ce second Mémoire, M. Hagen exprime les tensions en fractions de gramme; mais, je ne sais pourquoi, il prend pour unité de longueur la ligne de Paris; j'ai donc ramené toutes les valeurs au millimètre, en les divisant par 2,256, valeur de la ligne de Paris en millimètres.

M. Hagen soumet au même procédé l'alcool absolu et l'huile d'olive ; les tensions obtenues ont été respectivement, par millimètre de longueur, 2,32 et 3,42. Il n'a pas remarqué, à l'égard de ces deux liquides, de décroissement dans la tension.

Il décrit ensuite un nouveau procédé : un anneau plat horizontal en bois est suspendu à une balance sensible, et équilibré ; on établit le contact entre sa face inférieure et la surface du liquide, puis, au moyen de poids ajoutés très-graduellement de l'autre côté de la balance, on fait monter peu à peu l'anneau, qui soulève de la sorte une certaine quantité de liquide, et l'on s'arrête lorsque la surface de celle-ci aboutit verticalement aux bords extérieur et intérieur de l'anneau. La force avec laquelle le liquide tire alors l'anneau de haut en bas, se compose de deux parties, savoir : 1° le poids de la portion du liquide soulevé située directement sous l'anneau, c'est-à-dire celui d'un cylindre annulaire de ce liquide ayant pour base la face inférieure de l'anneau et pour hauteur la distance de celle-ci au niveau ; 2° la tension des surfaces courbes qui aboutissent aux deux bords de l'anneau. Si l'on soustrait du poids ajouté de l'autre côté de la balance la première de ces deux quantités, le reste représente donc la tension totale, et, pour avoir la tension par unité de longueur, il suffit de diviser ce reste par la somme des longueurs des deux bords.

Ce procédé, employé à l'égard de l'alcool absolu et de l'huile d'olive, a fourni les valeurs respectives 2,34 et 3,41, qui sont, on le voit, à fort peu près identiques aux précédentes. M. Hagen ajoute alors : « La concordance de ces résultats avec ceux déduits de l'élévation entre des plans parallèles, ou du phénomène capillaire proprement dit, ne laisse rien à désirer, et ainsi se

vérifie l'hypothèse que la tension superficielle, qu'on a mesurée directement dans le dernier cas, est la seule cause du phénomène capillaire. »

Ici donc M. Hagen cesse de considérer la tension comme une simple hypothèse, et voit dans les résultats ci-dessus une preuve de sa réalité.

M. Hagen essaie aussi la détermination de la tension du mercure; le procédé de la dépression dans les tubes cylindriques lui donne, par millimètre de longueur, 36,26, et celui des gouttes 41,14. Comme, dans ce dernier procédé, la surface est nécessairement plus fraîche, M. Hagen infère de la différence des deux résultats que, sur le mercure de même que sur l'eau, la tension décroît graduellement.

De l'empois et des solutions aqueuses de gomme arabique, à différents degrés de viscosité, lui fournissent des tensions très-rapprochées de celle de l'eau.

Présumant, en conséquence de ses idées sur l'origine de la tension, que l'eau de savon devait à une tension plus forte que celle de l'eau pure la propriété de donner une mousse persistante et de se laisser aisément gonfler en bulles, il mesure la tension d'une faible solution de savon, et ne la trouve que de 3,72; il reconnaît, en conséquence, qu'il s'était trompé.

Disons ici que toutes les mesures rapportées dans ce second Mémoire ont été prises à la température de 18° à 19°.

M. Hagen termine en déduisant de l'ensemble de son travail les deux conséquences suivantes, qu'il présente, du reste, avec réserve, vu le petit nombre des liquides soumis à l'observation :

1° Le degré de fluidité n'a pas d'influence sur la tension.

2° La tension est d'autant plus faible que le liquide mouille mieux les autres corps. En effet, l'alcool mouille mieux que l'huile, car de l'alcool déposé sur une plaque enduite d'huile déplace la couche de ce dernier liquide; l'huile mouille évidemment mieux que l'eau, et celle-ci mieux que le mercure; or la tension va en croissant du premier au dernier de ces liquides.

§ 153. En 1849, le même savant a écrit un travail remarquable (1) sur les expériences de Savart relatives aux effets produits par le choc des parties continues de deux veines liquides animées de mouvements directement opposés, expériences dont je parlerai plus loin (§§ 232 et 233) avec détail. M. Hagen ne s'occupe que du cas d'orifices égaux et de charges égales; on sait qu'alors il se forme, autour du point de rencontre des deux veines, une lame plane circulaire normale à ces deux veines, et du bord de laquelle s'échappent une multitude de gouttelettes.

M. Hagen appelle d'abord l'attention sur ces faits : que, d'après les observations de Savart, le rayon du disque liquide est toujours de beaucoup inférieur à la hauteur de charge, et même, en général, n'atteint pas le quart de cette hauteur, et 2° que les gouttes ne s'élancent du contour du disque qu'avec une faible vitesse ; il en conclut que la force vive du liquide qui s'étale, est en grande partie détruite à ce contour, et il attribue la destruction dont il s'agit à la tension des deux faces de la lame dans le sens perpendiculaire au rayon : si l'on décompose chacune des deux faces de la lame en anneaux concentriques infiniment étroits, tous ces anneaux partant de l'endroit

(1) *Ueber die Scheiben welche sich beim Zusammenstossen von zwei Wasserstrahlen bilden, und ueber die Auflösung einzelner Wasserstrahlen in Tropfen* (ANN. DE M. POGGENDORFF, vol. LXXVIII, p. 451).

où se fait la rencontre des deux veines, augmentent incessamment de diamètre en marchant vers le bord; de là résulte que leur tension dans le sens de leur circonférence doit être incessamment vaincue, ce qui ne peut avoir lieu sans perte de force vive; ou bien encore, ce qui revient au même, la tension dans le sens de la circonférence détermine, de la part de chaque point de l'anneau, une pression capillaire dirigée suivant le rayon et en sens contraire du mouvement du liquide, pression qui agit comme force retardatrice de ce mouvement, et produit ainsi la limitation du disque.

M. Hagen décrit, à l'appui de cette théorie, les curieuses expériences que voici :

Si l'on introduit dans le disque liquide un fil tendu qui le traverse normalement à peu de distance du centre, la continuité est interrompue, et une échancrure se forme dans le disque à partir du fil; mais les deux bords de cette échancrure ne sont pas droits et simplement dirigés suivant les rayons; ils se montrent courbes et tournant leur convexité vers l'échancrure; c'est que la tension ci-dessus tire chacun de ces bords d'une manière continue vers ce qui reste du disque.

Si, au lieu d'un seul fil, on en emploie deux tendus à une petite distance l'un de l'autre des deux côtés du rayon vertical ascendant, la portion du disque correspondante à l'intervalle des deux fils forme une sorte de veine qui atteint une hauteur peu inférieure à la hauteur de charge; c'est qu'ici l'extension latérale n'a pas lieu, et M. Hagen conclut, en outre, de la grande hauteur de ce jet, que la destruction de la force vive dans le disque n'est point due au choc mutuel des deux veines.

Il soumet ensuite sa théorie au calcul, et arrive à la formule suivante, dans laquelle R est le rayon du disque

liquide, ρ celui des deux veines, v la vitesse du liquide dans ces veines, T la tension du liquide sur l'unité de longueur, g la gravité et γ le poids de l'unité de volume du liquide :

$$R-\rho=\frac{\gamma}{2gT}\rho^2v^2.$$

Comme γ, g et T sont des constantes, et comme, en outre, le rayon ρ des veines est toujours très-petit relativement au rayon R du disque, cette formule exprime, on le voit, que le rayon du disque est sensiblement proportionnel au carré de celui des veines et au carré de la vitesse d'écoulement, ou, ce qui revient au même, à l'aire des orifices et à la charge; or ce sont là les deux lois énoncées par Savart.

Pour obtenir une vérification ultérieure de cette même formule, M. Hagen en tire, au moyen des valeurs de R, v et ρ déduites des observations de Savart et de ses observations propres, la valeur de T correspondante à l'eau, et trouve un résultat qui s'accorde assez bien avec celui que, dans son premier Mémoire, il avait déduit des phénomènes capillaires pour le cas d'une surface fraîche : la valeur à laquelle il parvient ainsi est 7,74, et l'on remarquera que, dans l'expérience des disques liquides, la surface est nécessairement fraîche, puisqu'elle est toujours renouvelée. M. Hagen fait observer, d'ailleurs, que la mesure du diamètre du disque liquide est difficile, parce que les gouttes se détachent irrégulièrement du bord, et qu'en même temps elles étirent fortement la lame, de sorte que le diamètre de celle-ci change continuellement dans chaque direction.

Toutes ces concordances, on le comprend, constituent une preuve ultérieure de l'existence de la tension; ici, en effet, le rôle assigné à cette force est absolument autre

que dans les expériences des deux Mémoires précédents.

Enfin M. Hagen obtient, pour représenter l'épaisseur b de la lame à une distance quelconque r du centre, cette autre formule :

$$b = \frac{\rho^2 (R-\rho)}{r(R-r)},$$

d'où il déduit la conséquence que le minimum d'épaisseur de la lame n'est pas vers le bord de celle-ci, mais correspond à $r = \frac{R}{2}$, c'est-à-dire se trouve au milieu du rayon.

Bien qu'il y ait, à mon avis, un peu d'obscurité sur le rôle que M. Hagen fait jouer à la tension dans le phénomène dont il s'agit, cependant les effets produits par les fils tendus en travers du disque liquide, l'accord de la première des formules ci-dessus avec les lois de Savart, et la coïncidence entre la valeur numérique de la tension de l'eau déduite de cette formule et celle que l'auteur avait trouvée par une méthode essentiellement différente, ne permettent guère de douter que la théorie en question ne soit l'expression de la vérité. Il est vivement regrettable que M. Hagen n'ait point cherché à s'assurer par l'expérience si la lame a réellement un minimum d'épaisseur vers le milieu de son rayon ; c'eût été une épreuve décisive.

Je dois présenter ici, à l'égard des résultats du calcul, deux remarques importantes qui paraissent avoir échappé à l'auteur.

En premier lieu, si l'on se transporte au bord même de la lame, c'est-à-dire si l'on fait, dans la seconde formule, $r = R$, on trouve $b =$ l'infini, ce qui est impossible. Mais si l'on fait $r = R - \rho$, on obtient $b = \rho$; ainsi, même à une distance du bord qui n'est égale qu'au rayon des

veines, l'épaisseur de la lame ne serait encore elle-même égale qu'à ce rayon : par exemple, avec des orifices de $1^{mm},5$ de rayon, la lame de Savart atteignait un rayon de 190^{mm}; à une distance du bord égale seulement à $1^{mm},5$, l'épaisseur de cette lame n'était donc aussi, d'après la formule, que de $1^{mm},5$. On voit conséquemment que, malgré l'augmentation en épaisseur à partir du milieu du rayon, cette épaisseur demeure cependant fort petite jusque très-près du bord, et c'est dans le petit intervalle restant que devrait se faire l'accroissement jusqu'à l'infini; or, vers le bord de la lame, se produit, nous le savons, un phénomène particulier que la formule ne pouvait comprendre, savoir : la formation des gouttes, lesquelles emportent le liquide qui occasionnerait le rapide accroissement d'épaisseur indiqué par la formule.

Pour que la théorie soit absolument complète, il faut donc rendre raison de la formation de ces gouttes; M. Hagen avoue qu'il ne trouve pas d'explication satisfaisante, et cela devait être, car le phénomène dépend en grande partie, ainsi qu'on le verra (§ 426), d'un principe que j'ai exposé dans ma 2me Série; or M. Hagen ne pouvait avoir connaissance de celle-ci, qui a paru à peu près en même temps que son Mémoire.

En second lieu, si, dans la même formule, on fait $r = \rho$, on trouve aussi $b = \rho$, d'où il suivrait qu'à l'origine du disque liquide, c'est-à-dire à une distance du centre égale au rayon même des deux veines qui se heurtent, la lame n'aurait pas plus d'épaisseur que près du bord; or Savart dit expressément que la lame est plus épaisse à sa partie centrale qu'à son contour. Mais c'est qu'à cette partie centrale se produit également un phénomène particulier dont le calcul de M. Hagen aurait

difficilement tenu compte : le liquide des deux veines ne peut changer brusquement la direction de son mouvement en des directions à angle droit avec celle-ci ; les filets liquides de ces veines, dans le voisinage du lieu où elles se rencontrent, doivent s'infléchir pour passer d'une manière continue de l'une des directions à l'autre ; il en résulte nécessairement une notable augmentation d'épaisseur vers la partie centrale de la lame, mais, un peu au delà, les deux faces de celle-ci peuvent être regardées comme se trouvant dans les conditions du calcul dont il s'agit.

§ 154. Si la couche superficielle d'une masse liquide pleine est dans un état de tension, les lames liquides doivent être assimilées à des membranes tendues, puisque la tension existe à leurs deux faces. On voit, d'après cela, que la tension d'une lame est double de celle de la couche superficielle d'une masse pleine formée du même liquide : en adoptant, par exemple, pour la tension de l'eau la valeur 7,53 milligrammes trouvée par M. Hagen, la tension d'une lame d'eau serait de 15,06 milligrammes.

§ 155. En 1855, M. J. Thomson (1) a expliqué par des différences de tension quelques phénomènes singuliers produits à la surface de certains liquides :

Si l'on dépose doucement, au milieu de la surface de l'eau contenue dans un verre, une petite quantité d'alcool, on voit cette surface fuir rapidement de tous les côtés, et si la portion de la paroi solide qui s'élève au-dessus du niveau est mouillée d'eau, on voit même le liquide monter le long de cette paroi et s'y accumuler de manière à former quelquefois, à une hauteur considé-

(1) *On certain curious motions observable at the surfaces of wine and other alcoholic liquors* (PHILOS. MAGAZ., 4me série, vol. X, page 330).

rable au-dessus du niveau, un anneau horizontal que son poids fait ensuite retomber.

Si l'on étend une couche d'eau de peu d'épaisseur sur une surface solide horizontale bien nettoyée, et qu'au milieu de cette couche on dépose un peu d'alcool, l'eau se retire immédiatement tout à l'entour, laissant un espace creux où la surface solide est mise à nu ou plutôt n'est plus recouverte que d'une lame d'alcool excessivement mince.

C'est que, la tension de l'alcool étant inférieure à celle de l'eau, l'équilibre ne peut plus exister lorsqu'une portion de la surface est recouverte d'alcool : en vertu de leur excès de tension, les portions aqueuses de la surface totale tirent violemment à elles la portion alcoolique.

M. Thomson attribue à la même cause les mouvements curieux qu'on observe ordinairement dans la mince couche de vin dont on a mouillé, au-dessus du niveau, la paroi intérieure d'un verre contenant de ce liquide; en effet, la mince couche dont il s'agit perd son alcool, par l'évaporation, plus rapidement que le reste, et acquiert ainsi un excès de tension.

§ 156. Dans une Note(1) communiquée en 1858 à la Société Royale, Sir W. Thomsom, partant du principe de la tension tel que l'a posé Young, donne, en fonction de cette force, l'expression analytique suivante de la pression p exercée par une bulle creuse sur l'air emprisonné :

$$p=\frac{4T}{r}+\Pi,$$

expression dans laquelle T est la tension du liquide dont la bulle est formée, r le rayon de cette bulle, et Π la

(1) *On the thermal Effect of drawing out a Film of liquid* (PHILOS. MAGAZ., 4me série, vol. XVII, p. 61).

pression atmosphérique. Cette formule, que l'auteur ne démontre pas, est exacte, comme nous le verrons bientôt.

Par une série de calculs, Sir W. Thomson arrive ensuite, relativement aux lames liquides qui se développent, à un principe que nous rapporterons plus tard.

§ 156[bis]. Langberg a fait voir, dans un article(1) publié en 1859, que les actions capillaires ont une influence notable sur les mesures aréométriques, l'instrument étant tiré de haut en bas par le poids du liquide soulevé contre sa tige. Pour évaluer ce poids, Langberg fait intervenir la tension qui s'excerce à la circonférence suivant laquelle la surface du liquide aboutit à la tige solide ; il paraît, du reste, ne considérer cette force que comme hypothétique. La tension variant d'un liquide à un autre, on comprend que lorsqu'on emploie un aréomètre à la mesure des densités de différents liquides, les résultats ne peuvent être bien comparables que si l'on tient compte de l'influence dont il s'agit, influence qui n'est pas négligeable.

§ 157. En 1863, Wilhelmy(2) a tâché de soumettre à une vérification expérimentale une proposition énoncée par Wertheim, et suivant laquelle le poids du liquide soulevé par la capillarité le long d'une surface solide que ce liquide mouille, varie avec la nature et avec la courbure de celle-ci. Les expériences de Wilhelmy semblent confirmer cette proposition ; or si l'on considère le poids dont il s'agit comme soutenu par la tension

(1) *Ueber den Einfluss der Capillarattraction auf Aräometermessungen* (ANN. DE M. POGGENDORFF, vol. CVI, p. 299).

(2) *Ueber die Abhängigkeit der Capillaritäts-Constanten des Alkohols von Substanz und Gestalt des benetzten festen Körpers* (ANN. DE M. POGGENDORFF, 1863, vol. CXIX, p. 177), et *Ueber die Abhängigkeit des Capillaritäts-Coefficienten der Flüssigkeiten von der chemischen Beschaffenheit und Gestalt der festen Wand* (Ibid. 1864, vol. CXXII, p. 1).

du liquide, et comme servant à en trouver la mesure (§§ 152 et 161), ces mêmes expériences tendent à jeter quelque incertitude sur la précision des valeurs des tensions ainsi obtenues.

§ 158. Aujourd'hui l'on possède des démonstrations théoriques de la réalité de la tension, et l'on a plusieurs moyens nouveaux de la constater par l'expérience.

La première de ces démonstrations a été donnée, en 1864, par M. Lamarle, dans la première partie de son beau Mémoire *Sur la stabilité des systèmes liquides en lames minces* (1), Mémoire sur lequel j'aurai à revenir; elle suppose une masse liquide pleine, entièrement libre, soumise à ses seules attractions moléculaires, et conséquemment de forme sphérique (2).

M. Lamarle arrive à conclure non seulement que la couche superficielle d'une semblable masse est dans un état de tension, mais, en outre, que cette tension est indépendante du rayon de la sphère; enfin il fait remarquer que les mêmes résultats s'étendent sans difficulté à toutes les surfaces liquides d'équilibre, c'est-à-dire que, dans ces surfaces et pour un même liquide, la tension est constante et indépendante des courbures, ainsi que cela avait été établi par Mossotti et par M. Hagen.

Je ne reproduirai pas la démonstration dont il s'agit telle qu'elle est exposée dans le Mémoire; je la modifierai, d'après les indications de M. Lamarle lui-même, en l'appliquant aux lames; elle sera ainsi plus aisément comprise. Sous cette forme, elle revient, au fond, à celle de M. Henry (§ 151), rendue plus précise et plus complète.

(1) Mém. de l'Acad. de Belgique, tomes XXXV et XXXVI.

(2) L'exactitude de cette démonstration a été contestée par Dupré, et maintenue par M. Lamarle (voir les *Comptes rendus*, t. LXIV, pp. 593, 739 et 902).

Supposons une sphère laminaire, une bulle de savon, par exemple, et coupons-la idéalement par un plan qui la partage en deux hémisphères ; imaginons ce plan solidifié, ce qui n'altérera pas l'équilibre, et considérons en particulier l'un des hémisphères. La lame qui constitue celui-ci presse, nous le savons, sur l'air qu'elle emprisonne entre elle et le plan, et ce volume d'air réagit, par son élasticité, avec une force égale ; l'hémisphère laminaire et le plan sont donc poussés l'un dans un sens, l'autre dans le sens opposé, d'où résulte une traction de la lame tout le long de la petite bande par laquelle elle adhère au plan ; or une traction égale et contraire est évidemment exercée le long de la même bande par l'autre hémisphère ; il y a donc, sur toute la longueur de la bande étroite dont il s'agit, traction en deux sens opposés et perpendiculaires à cette longueur ; en d'autres termes, il y a tension de la lame. Enfin, comme rien ne détermine la direction de notre plan coupant, il s'ensuit que la même tension existe dans toute l'étendue de la lame, et qu'elle a la même valeur dans toutes les directions tangentielles autour de chaque point.

La tension est considérée ici comme une traction ; mais la lame résistant par une force égale et contraire, on peut aussi bien regarder cette dernière force comme constituant la tension. Sous ce point de vue, la tension est une force contractile, une tendance continuelle de la lame à revenir sur elle-même en diminuant d'étendue.

Le mode de démonstration ci-dessus conduit à une expression de la tension en données mesurables. Désignons par p la pression rapportée à l'unité de surface qu'exerce la lame sur l'air emprisonné, et conséquemment aussi la pression de dedans en dehors due à la réaction de cet air. La force totale qui agit ainsi de

dedans en dehors sur l'un des hémisphères laminaires et tend à le séparer du plan, est nécessairement égale à celle qui pousse le plan lui-même ; elle a donc pour mesure le produit de la surface de celui-ci par la quantité p, c'est-à-dire $\pi r^2 p$, où r est le rayon de la sphère laminaire ; je néglige ici la petite différence entre le rayon de la face extérieure de la lame et celui de la face intérieure, à cause de la minceur extrême des lames liquides. Cette expression représente en même temps, d'après ce que j'ai dit plus haut, la tension totale sur la longueur de la bande étroite suivant laquelle la lame est coupée par le plan, et, par conséquent, pour avoir la tension sur l'unité de longueur, tension que je nommerai t, il suffit de diviser cette même expression par la longueur $2\pi r$ de la bande en question, ce qui donne[1] $t = \frac{rp}{2}\cdot$ Mais on a vu (§ 117) que si d est le diamètre d'une sphère laminaire, h la hauteur en millimètres à laquelle le liquide dont la lame est formée s'élèverait dans un tube capillaire d'un millimètre de diamètre, et ρ la densité de ce liquide, la pression qu'exerce la lame équivaut, pour une surface d'une étendue quelconque, et, par suite, pour l'unité de surface, au poids d'une colonne d'eau ayant pour base cette surface et, pour hauteur, $\frac{2h\rho}{d} = \frac{h\rho}{r}\cdot$ En prenant pour unité de surface le millimètre carré, la quantité $\frac{h\rho}{r}$ exprime donc en milligrammes la pression que nous avons désignée par p;

(1) Si l'on représente avec Sir W. Thomson (§ 156), par T la tension du liquide, c'est-à-dire celle d'une des faces de la lame, on a $t = 2T$; en substituant cette valeur dans l'expression ci-dessus, résolvant par rapport à p, et ajoutant la pression atmosphérique Π, on retombe sur la formule de Sir W. Thomson.

faisant la substitution dans l'expression de t trouvée plus haut, il vient :

$$t = \frac{h\rho}{2},$$

ce qui donne, en milligrammes, la tension de la lame sur l'unité de longueur.

Cette formule se déduirait d'ailleurs de celles de Mossotti; elle résulte également du calcul de M. Hagen relatif aux liquides dans les tubes cylindriques (§ 152), quand on suppose le diamètre du tube égal à 1 millimètre, et quand on considère la surface supérieure de la colonne comme formant un hémisphère concave, ce qui est permis dans le cas d'un si petit diamètre.

§ 159. Cette même formule ne contenant pas r, on voit que la tension dont il s'agit est indépendante du rayon et conséquemment de la courbure de la lame.

La constance de la valeur de la tension, quelle que soit la courbure de la sphère laminaire, sera pleinement confirmée plus loin par l'expérience (§§ 175 et 179).

Maintenant si l'on imagine que le rayon de la sphère laminaire croisse jusqu'à l'infini, la lame deviendra plane, et il résulte de ce qui précède qu'elle aura encore la même tension. Cependant on n'arrive de cette manière à la tension d'une lame plane qu'en considérant cette lame comme indéfiniment étendue, et en lui assignant ainsi des conditions irréalisables; on pourrait dès lors se demander si une lame plane limitée, par exemple une lame de liquide glycérique formée dans un anneau en fil de fer, lame qui n'exerce aucune pression sur l'air, possède effectivement une tension; or nous verrons aussi, dans les paragraphes que nous venons de citer, des expériences qui prouvent qu'une lame plane limitée est

réellement tendue, et que sa tension est égale à celle de lames courbes formées du même liquide.

§ 160. Je ne dois pas négliger de mentionner un second point de vue sous lequel M. Lamarle, dans le Mémoire que j'ai cité, envisage la tension ; le voici : suivant les idées admises en général aujourd'hui, la densité de la couche superficielle est moindre que celle de l'intérieur du liquide, et conséquemment, dans cette couche, l'écartement des molécules est plus grand ; si donc, par un changement de la forme d'une masse liquide sans changement du volume, l'étendue de la couche superficielle vient à décroître et qu'ainsi une partie des molécules de cette couche se rendent dans l'intérieur, ces molécules se rapprochent davantage ; or l'attraction, par sa nature même, fait incessamment effort pour rapprocher les molécules ; elle doit donc réduire la couche superficielle au minimum d'étendue, puisque, par là, elle exerce sa tendance d'une manière active.

Ainsi, d'après M. Lamarle, la tension est due à ce que, par une diminution de la couche superficielle, la tendance constante de l'attraction au rapprochement des molécules trouve à se satisfaire autant que possible.

§ 160bis. M. Marangoni s'est occupé(1), en 1865, de l'étalement d'une goutte liquide sur la surface d'un autre liquide, comme d'une goutte d'huile sur l'eau. Il attribue le phénomène à la tension, et, par des considérations judicieuses, il arrive à la loi suivante :

Il y a étalement si la tension du liquide sous-jacent l'emporte sur la somme des tensions respectives du liquide dont la goutte est formée et de la surface de contact des deux liquides. Quand la condition inverse a

(1) *Sull' espansione delle goccie d'un liquido galleggianti sulla superfice di altro liquido.* Pavie.

lieu, la goutte prend et conserve une forme lenticulaire.

L'auteur avance qu'une lame d'eau de savon développée dans un anneau solide, peut être traversée sans se briser par une veine liquide, si la tension du liquide de cette veine est égale ou supérieure à celle du liquide de la lame; c'est ce qui a lieu, par exemple, avec des veines d'eau de savon, d'eau pure, d'huile, de sulfure de carbone, et même de mercure; mais si la différence des tensions est en sens contraire, comme avec des veines d'alcool ou d'éther, la lame éclate immédiatement. Il suffit même, pour qu'elle disparaisse, de la toucher simplement avec une pointe mouillée de l'un de ces deux liquides.

Afin de montrer que l'adhérence entre deux liquides modifie la tension à leur surface commune, M. Marangoni introduit dans un tube capillaire un index formé de deux liquides différents en contact, par exemple d'eau et de sulfure de carbone; alors la surface de contact des deux liquides tourne sa concavité du même côté que la surface libre du sulfure de carbone; or, quand le tube est placé horizontalement, on voit la petite colonne marcher du côté que regarde la surface libre de l'eau. Cela étant, si l'on désigne par A la résultante, dans le sens de l'axe du tube, de la tension du ménisque à l'extrémité de l'eau, et par C et B les quantités analogues relatives à la surface libre du sulfure de carbone et à la surface commune, le mouvement observé indique qu'on a $A > C + B$, d'où $B < A - C$. Ainsi, non seulement la tension des surfaces en contact est modifiée, mais, dans le cas des deux liquides en question, elle est moindre que la différence des tensions de ceux-ci.

§ 161. Dupré a publié par parties, de 1865 à 1868,

un travail remarquable [1], où il traite par des méthodes nouvelles une suite de questions concernant les actions moléculaires, et où il donne aussi une démonstration de l'existence réelle de la tension :

Il établit d'abord que, pour séparer en deux une masse liquide soit par arrachement perpendiculaire, soit par glissement, il faut vaincre une résistance, et que, réciproquement, lorsque deux surfaces liquides peuvent se réunir, il y a une force résidant dans leurs couches superficielles qui provoque la réunion; il la nomme *force de réunion*.

Partant de ce principe, il démontre qu'une masse liquide ne peut changer de forme avec diminution dans l'étendue de sa surface, sans qu'un travail moléculaire proportionnel à cette diminution soit produit par la force de réunion [2]. Or cette force toujours présente doit tendre sans cesse à opérer le travail dont il s'agit, et, par suite, à rendre la surface minima; la couche superficielle des liquides possède donc une force contractile, ou une tension.

Dupré indique plusieurs expériences fort simples au moyen desquelles on rend la tension manifeste soit dans la surface libre d'une masse liquide pleine, soit dans une lame liquide. Dans l'une de ces expériences, par exemple, un poids est soulevé par la tension d'une lame plane : qu'on se figure une plaque métallique rectangulaire verticale, dont le bord horizontal inférieur présente, en son milieu, une échancrure également rectangulaire. Cette

(1) Cinquième, sixième et septième Mémoire *Sur la théorie mécanique de la chaleur* (ANN. DE CHIM. ET DE PHYS. DE PARIS, 4e série, tomes VI, VII, IX, XI et XIV).

(2) Dans le septième Mémoire, Dupré décrit un instrument au moyen duquel il a vérifié expérimentalement cette proportionnalité entre le travail produit et la diminution de surface.

plaque étant préalablement mouillée d'eau de savon, si l'on applique contre elle devant l'échancrure, et à la hauteur du bord supérieur de celle-ci, une bande solide étroite et très-légère, un peu plus longue que la largeur de l'échancrure et mouillée aussi d'eau de savon, puis qu'on fasse glisser cette petite bande de haut en bas, une lame liquide se forme nécessairement dans la portion de l'échancrure ainsi balayée; or, dès qu'on abandonne la petite bande à elle-même, elle remonte brusquement malgré son poids.

Dupré attribue la tension à ce que, dans l'épaisseur de la couche superficielle, les actions moléculaires seraient, en moyenne, plus intenses suivant le sens tangentiel que suivant le sens normal; c'est, selon lui, l'excès des premières sur les secondes qui constitue la tension.

Désignant celle-ci par F, il trouve, d'une manière générale, pour la pression capillaire normale provenant des courbures en un point quelconque d'une surface liquide, l'expression $F\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$; le coefficient constant de l'expression de Laplace est donc bien la tension dans tous les cas, et, pour un même liquide, celle-ci est toujours uniforme, c'est-à-dire complétement indépendante du point considéré de la surface, ainsi que des courbures.

Dupré fait remarquer que la tension des lames liquides est indépendante de leur épaisseur, du moins tant que cette épaisseur n'est pas inférieure à une certaine limite. En effet, la tension n'existant que dans les deux couches superficielles, couches excessivement minces, nous le savons, il est clair que le liquide compris entre elles est sans influence, et qu'ainsi lorsque, par une atténuation de la lame, il diminue en quantité, la tension doit demeurer invariable.

Cette déduction se trouve vérifiée par les expériences que j'ai décrites à l'égard de la pression exercée par une bulle creuse sur l'air intérieur. On a vu, en effet (§ 158) que la tension de la lame est liée à la pression dont il s'agit par la relation $t = \frac{rp}{2}$, d'où il suit que, pour une bulle d'un rayon r donné, si, malgré l'amincissement progressif de la lame, la pression p ne change pas, il en sera de même de la tension t; or j'ai constaté, on l'a vu (§ 125), cette constance de la pression à l'égard d'une lame sphérique qui s'amincissait spontanément et n'a éclaté que lorsque sa couleur, sous l'incidence normale, avait atteint le passage du jaune au blanc du premier ordre.

Mais, ainsi que je l'ai fait observer (§ 123), l'invariabilité de la pression suppose à la lame une épaisseur suffisante pour qu'il y ait du liquide interposé entre les deux couches superficielles, c'est-à-dire une épaisseur supérieure au double du rayon de l'attraction moléculaire; car si la lame s'amincit assez pour que les deux couches superficielles arrivent au contact, puis se pénètrent mutuellement, il est naturel d'admettre que la pression, et conséquemment la tension, diminue par suite de la diminution dans le nombre des molécules agissantes; on est donc conduit à cette conséquence que la limite au-dessous de laquelle la tension commence à décroître, est égale au double du rayon de l'attraction moléculaire.

Dans son cinquième Mémoire, où il fait abstraction de la différence de constitution entre la couche superficielle et le reste de la masse, Dupré avait trouvé que, pour un même liquide à diverses températures, la tension est proportionnelle au carré de la densité; mais,

dans son sixième Mémoire, où il tient compte de la différence dont il s'agit, il reconnaît que cette proportionnalité n'est pas exacte.

L'expression $t' = \frac{h\rho}{4}$ de la tension d'une seule couche superficielle[1] montre, du reste, que la tension varie en sens inverse de la température, puisqu'il en est ainsi à la fois de h et de ρ ; mais comme, pour la plupart des liquides, l'influence de la température sur ces deux quantités n'est pas très-considérable, il s'ensuit que la tension change peu par les fluctuations de la température ordinaire : pour l'eau, par exemple, d'après un tableau que donne Dupré, de 10° à 32°, la tension ne décroît que de 7,48 à 7,15. On a vu que ce peu de variabilité avait déjà été observé par M. Hagen.

Dupré avance que, par suite de l'influence de la température sur la tension, si l'on chauffe une partie seulement d'une surface liquide, l'équilibre doit être altéré, et il ajoute : « Dans le cas des lames, le liquide formant les deux couches superficielles de la partie chauffée est entrainé vers les parties froides par des différences de forces contractiles..... La lame s'amincit et finit par crever. » Il ne décrit aucune expérience, mais, comme nous le verrons bientôt, on peut en faire à ce sujet de fort curieuses.

Il donne le moyen de déterminer, par le calcul, la tension d'un liquide en fonction des équivalents chimiques des éléments de celui-ci.

Quand une lame liquide éclate, elle revient sur elle-même par l'effet de sa tension ; la chose se montre aux yeux dans des expériences que nous devons réserver

(1) Je n'ai pas besoin de faire remarquer que cette expression est simplement la moitié de celle de la tension d'une lame (§ 158).

pour un autre chapitre; or Dupré traite le phénomène par ses méthodes, et arrive, pour exprimer la vitesse v du retrait de la lame, à la formule :

$$v = \sqrt{\frac{4gF}{e\Delta}},$$

dans laquelle F est la tension d'une seule couche superficielle, g la gravité, e l'épaisseur de la lame et Δ la densité du liquide; d'où l'on voit que cette vitesse est uniforme, qu'elle est en raison directe de la racine carrée de la tension et en raison inverse des racines carrées de l'épaisseur et de la densité. Dupré trouve, de cette manière, que la vitesse de retrait d'une lame de liquide glycérique de $\frac{1}{9000}$ de millimètre d'épaisseur serait d'environ 32 mètres par seconde.

La valeur que la formule ci-dessus assigne à la vitesse de retrait est probablement assez exacte pour la plupart des liquides ; mais, ainsi que nous le verrons plus loin, il y a des liquides à l'égard desquels il en est autrement, parce que le phénomène est influencé par un élément dont Dupré ne pouvait tenir compte. Ajoutons que le retrait est, en général, accompagné d'une particularité qui le complique; nous en parlerons aux §§ 428 et 429.

Dupré cherche aussi la loi d'un autre phénomène qu'on peut également rapporter à la tension, savoir la diminution progressive du diamètre d'une bulle quand on laisse ouvert le tube qui a servi à la gonfler ; il parvient à ce résultat que, pour deux bulles formées du même liquide, toutes choses égales d'ailleurs, les carrés des temps pendant lesquels elles se vident sont entre eux comme les 7mes puissances de leurs diamètres. Il vérifie cette loi par une suite d'expériences sur des bulles de liquide glycérique.

Enfin Dupré décrit plusieurs procédés au moyen desquels il a mesuré la tension d'un grand nombre de liquides.

Le premier consiste dans l'emploi d'un aréomètre de Nicholson modifié de la manière suivante : le plateau supérieur est remplacé par une cuvette cylindrique dans laquelle on verse le liquide à essayer; deux fils de laiton partant horizontalement des extrémités d'un diamètre de cette cuvette, se replient ensuite pour descendre à l'extérieur du vase contenant l'eau, et se réunir au-dessous du fond par l'intermédiaire d'un plateau destiné à recevoir le lest et les poids. Après avoir établi l'affleurement, on descend verticalement dans la cuvette une lame solide mince, susceptible d'être mouillée par le liquide, et dont le bord inférieur est bien horizontal; dès que ce bord touche le liquide, celui-ci s'élève par l'action capillaire le long des deux faces de la lame, et sa tension soulève l'aréomètre d'une certaine quantité; on ajoute alors des poids pour ramener l'affleurement; et de ces poids on déduit la tension en divisant leur valeur par le périmètre du bord de la lame. J'omets ici quelques détails de moindre importance qu'on trouvera dans le Mémoire, ainsi qu'une petite correction à faire subir au résultat quand on veut une grande exactitude.

La second procédé est, à quelques différences près dans l'appareil, celui dont j'ai fait usage (§§ 119 à 121) pour l'évaluation de la pression des bulles (1) : la tension est donnée alors par la relation, rappelée plus haut, $t = \frac{rp}{2} = \frac{pd}{4}$. D'après cela, pour la tension de la surface

(1) Lorsque Dupré a rédigé son 5me Mémoire, il ne connaissait pas la partie de mes recherches rappelée ci-dessus (Voir la note du § 196 de ce 5me Mémoire).

d'une masse pleine formée du même liquide, on a $t=\frac{pd}{8}$, expression que trouve également Dupré. Ce physicien a disposé son appareil de manière à pouvoir opérer sur de très-petites bulles ($2^{mm},5$ à $3^{mm},5$ de diamètre), ce qui lui a permis de soumettre à l'expérience des liquides, tels que l'eau, dont les bulles un peu grosses ne se formeraient pas.

A l'aide de ce même appareil, Dupré a vérifié, comme je l'avais fait (§ 121), la constance du produit *pd* de la pression par le diamètre de la bulle.

Le troisième procédé n'est qu'une modification du précédent : au moyen du même appareil encore, une très-petite bulle d'air est gonflée au sein du liquide à essayer, mais aussi près que possible de la surface de celui-ci ; dans ce cas, on n'a à considérer que la tension d'une seule couche superficielle ; seulement, pour avoir un résultat précis, il faut tenir compte de la petite pression hydrostatique due au liquide ambiant.

Un quatrième procédé est basé sur ce que la hauteur d'un jet de liquide lancé de bas en haut par un orifice de très-petit diamètre, doit être notablement diminuée par la tension de la surface de ce jet. Dupré parvient à lier, au moyen d'une formule, cette tension aux autres éléments du phénomène. La formule dont il s'agit contient des termes qui dépendent de quantités dont l'évaluation est impossible, telles que le frottement contre le bord de l'orifice; mais Dupré, à l'aide d'un artifice ingénieux, écarte la difficulté, et les résultats de l'expérience s'accordent d'une manière très-satisfaisante avec ceux des autres procédés.

Dupré tire aussi un procédé de l'écoulement goutte à goutte, et sa méthode évite l'inconvénient signalé par M. Hagen (§ 152).

Enfin, dans le cas d'une goutte liquide déposée sur un plan horizontal qu'elle ne mouille pas, il obtient une relation entre la tension, le poids de la goutte, la densité du liquide et le diamètre du cercle de contact avec le plan; d'où un dernier procédé, qui, du reste, n'est applicable qu'au mercure et aux solides fondus.

Le cinquième Mémoire donne, dans un tableau, les tensions de dix-huit corps, la plupart liquides à la température ordinaire, d'autres liquéfiés par la chaleur. Pour les métaux à l'état de fusion, Dupré obtient, par le dernier procédé ci-dessus, des valeurs beaucoup plus élevées que celles qui appartiennent aux liquides ordinaires, à l'exception du mercure : il trouve, par exemple, pour la tension de l'or fondu, 96,2, et, pour celle de l'étain fondu, 51,2.

§ 162. Les expériences de Dupré ont conduit, en 1866, M. Van der Mensbrugghe[1] à imaginer trois nouveaux procédés pour constater la tension des lames liquides, procédés dont deux permettent, en outre, d'évaluer cette tension. Voici le premier :

Dans un contour plan et horizontal en fil de fer, on réalise une lame de liquide glycérique; on noue ensemble les deux bouts d'un fil de soie très-fin de longueur convenable, puis, après avoir mouillé ce fil du même liquide, on le dépose avec précaution sur la lame, où il forme un contour irrégulier. Cela fait, on crève la portion de la la lame comprise à l'intérieur de ce contour; à l'instant même le fil de soie se tend et prend une figure exactement circulaire. C'est que la portion restante de la lame se contracte en vertu de sa tension, de manière à occuper la moindre étendue, ce qui exige que l'ouver-

(1) *Sur la tension des lames liquides* (BULLET. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, 2me série, tome XXII, p. 308).

ture limitée par le fil devienne aussi grande que possible, et conséquemment circulaire.

M. Van der Mensbrugghe se demande quelle disposition le fil doit adopter si l'on effectue la même expérience sur une surface laminaire courbe, en choisissant, bien entendu, une surface à courbure moyenne nulle. Il soumet la question au calcul, et arrive aux lois suivantes :

1° Le fil est également tendu dans toute sa longueur.

2° La courbe représentée par le fil a partout le même rayon de courbure.

3° Le rapport entre la tension du fil et le rayon de courbure est indépendant de la forme de la surface et de la longueur du fil, et est égal à la tension de la lame.

Le second procédé est une modification du premier. Le contour solide qui contient la lame est rectangulaire et vertical; le fil de soie, au lieu de constituer un contour fermé, est attaché par l'une de ses extrémités en un point du côté horizontal inférieur du rectangle solide, il quitte la lame en un autre point de ce même côté, et son extrémité libre soutient un poids léger. Après la rupture de la portion de lame ainsi interceptée, le fil se tend, et prend, si le poids suspendu n'est pas trop fort, la forme d'une demi-circonférence. A la vérité, l'équilibre est instable, mais il se maintient par le petit frottement du fil contre le côté du rectangle. Dans ces conditions, qu'on réalise au moyen de certaines précautions, le poids suspendu donne la tension du fil, et le rayon de la demi-circonférence dessinée par celui-ci se mesure directement au compas; pour avoir la tension de la lame liquide, il suffit donc, d'après la troisième loi ci-dessus, de diviser la première quantité par la seconde.

Dans le troisième procédé, la lame est une portion de caténoïde, attachée par son bord supérieur à un anneau

solide horizontal et fixe, et, par son bord inférieur, à un anneau solide plus petit, également horizontal, qu'elle tient suspendu. Ce dernier anneau soutient lui-même un plateau très-léger, sur lequel on verse doucement du sable ; le système solide suspendu descend au fur et à mesure, en étendant la lame, et l'on s'arrête lorsque l'élément de la chaînette méridienne qui aboutit à l'anneau mobile est devenu vertical ou à très-peu près ; on le reconnaît à ce que l'équilibre devient alors instable. Ce point atteint, on a la tension de la lame en divisant par la circonférence de l'anneau mobile le poids total du système suspendu.

M. Lamarle, dans son rapport[1] sur la Note que je viens d'analyser, signale une quatrième loi relative à la forme que prend le fil après la rupture de la portion de lame interceptée ; cette loi consiste en ce que la direction du fil doit être partout celle suivant laquelle la courbure de la surface est nulle. Or M. Lamarle fait observer que la coïncidence de cette même loi avec les trois autres est généralement impossible sur les surfaces à courbure moyenne nulle; il le montre en particulier pour le caténoïde, et il en conclut que, dans les cas de cette nature, la forme de la lame doit nécessairement être altérée ; il ne connaît, pour le moment, que deux surfaces, savoir le plan et l'héliçoïde gauche à plan directeur, susceptibles de satisfaire à l'ensemble des quatre lois.

M. Van der Mensbrugghe a donc repris ses expériences, et les a exposées dans une deuxième Note[2]; il a vérifié la conclusion de M. Lamarle sur la non-déformation de l'héliçoïde gauche, et il a constaté, par un procédé ingénieux, la déformation du caténoïde; il

(1) *Bullet. de l'Acad. de Belgique,* 1866, 2me série, t. XXII, p. 272.

(2) *Sur la tension des lames liquides,* 2me Note (Ibid., 1867, 2me série, t. XXIII, p. 448).

trouve, du reste, que cette déformation n'est bien notable que dans le voisinage du fil. Ces faits remarquables montrent une fois de plus l'accord constant de l'expérience avec la théorie.

Cette deuxième Note se termine par la description d'une expérience curieuse : une lame de liquide glycérique est réalisée dans un anneau vertical en fil de fer; on dépose à l'intérieur de cet anneau, sur son point le plus bas, une sphère creuse en verre très-légère, de deux centimètres environ de diamètre, préalablement mouillée du même liquide; celle-ci se place aussitôt d'elle-même de manière à être coupée en deux parties égales par le plan de la lame; elle demeure ainsi dans un état d'équilibre stable, et si l'on fait tourner l'anneau sur lui-même, elle roule à l'intérieur sans le quitter. M. Van der Mensbrugghe explique le phénomène par l'effort que fait constamment la lame pour occuper une étendue minima; cette condition exige, en effet, que la lame aboutisse à la sphère de verre suivant un grand cercle de celle-ci.

§ 162bis. Pour donner un exemple ultérieur des effets de la tension à la surface des gouttes liquides, M. Luvini a montré(1) en 1868, que ces gouttes peuvent elles-mêmes supporter des poids : il amène au contact avec le bas d'une goutte suspendue à une baguette de verre horizontale, un petit système en papier, dont il indique la construction; aussitôt l'adhérence établie, la goutte se raccourcit et s'étend un peu ; alors il abandonne le système en papier et celui-ci demeure soutenu ; enfin il y ajoute de petits morceaux de papier pour en augmenter le poids. Il trouve, de cette manière, qu'une goutte d'eau de médiocre grosseur attachée à une baguette de verre de 5^{mm} de diamètre, peut supporter un poids de

(1) *Saggio di un corso di fisica elementare*. Turin, 4me édition, p. 233.

35 à 50 centigrammes. Ces poids me paraissent bien forts, et je suis porté à croire qu'une cause d'erreur inaperçue s'est glissée dans les expériences de l'auteur.

§ 163. M. Quincke a présenté, en 1868 aussi, à l'Académie de Berlin une Note[1] dans laquelle il étend aux surfaces solides le principe de la tension. A l'aide de considérations ingénieuses, il détermine cette tension, par millimètre de longueur, pour un certain nombre de métaux, et trouve ainsi des valeurs énormes; pour le fer en fils, par exemple, la tension équivaudrait à près de 6 kilogrammes.

Dans la même Note, M. Quincke cherche les tensions de plusieurs métaux fondus et du verre fondu, à des températures voisines du point de solidification; il emploie la méthode de l'écoulement goutte à goutte, en fondant, à l'aide d'une très-petite flamme, l'extrémité inférieure d'un fil vertical de chacun de ces corps, et en évaluant le poids d'une goutte. Il prend pour mesure de la tension ce poids divisé par le périmètre de la section du fil, et néglige ainsi la petite quantité de matière liquide qui, après la chute d'une goutte, demeure adhérente au fil (§ 152); aussi ne présente-t-il les valeurs trouvées que comme approximatives; elles s'éloignent assez notablement de celles que Dupré avait données et qui, d'après la méthode dont ce dernier a fait usage, devaient correspondre aussi à peu près au point de solidification.

En 1868 encore, M. Quincke a publié une autre Note[2], dans laquelle il poursuit, par le même procédé, ses mesures de la tension des corps fondus. Il signale une

(1) *Ueber die Capillaritätsconstanten fester Körper* (COMPTES RENDUS DE L'ACAD. DE BERLIN, 1868, p. 132).

(2) *Ueber die Cappillaritätsconstanten geschmolzener Körper* (ANN. DE M. POGGENDORFF, vol. CXXXV, p. 621).

deuxième cause d'erreur, opposée à la précédente, et consistant en ce que, pendant la formation de l'étranglement qui précède la chute de la goutte, il y a un certain afflux de liquide vers cette goutte, laquelle prend ainsi un volume, et conséquemment un poids, un peu trop grand. Il pense qu'on peut néanmoins employer ce procédé, à défaut d'un autre plus précis, pour obtenir des valeurs approchées. Dans le cas des corps facilement oxydables, il fait subir au procédé une modification ingénieuse, qui lui permet de former les gouttes dans une atmosphère d'acide carbonique. Par une autre modification, il détermine la tension de plusieurs sels fondus. L'ensemble de ses résultats comprend 29 solides à l'état de fusion.

Il rapporte des mesures de la tension de l'eau déduites de la hauteur à laquelle ce liquide s'élève le long d'une paroi verticale préalablement mouillée, et trouve ainsi, en moyenne, à 0°, la valeur 8,79. Il attribue la grande infériorité des valeurs obtenues par les autres physiciens, à ce que ces derniers n'ont pas opéré assez vite, la tension de l'eau diminuant rapidement quand le liquide reste exposé à l'air (§ 152).

Enfin, dans une troisième Note[1] (année 1869), le même savant évalue la tension d'une suite de corps composés fondus, par une méthode qui lui paraît plus exacte que la précédente : elle consiste à verser sur une plaque solide horizontale la substance fondue, en quantité assez grande pour que sa surface supérieure soit sensiblement plane, et à mesurer, à l'aide de certains moyens, la hauteur de cette large goutte et celle de l'élément vertical de sa ligne méridienne ; nommant respectivement ces

(1) *Ueber die Capillaritätsconstanten geschmolzener chemischer Verbindungen* (ANN. DE M. POGGENDORFF, vol. CXXXVIII, p. 141).

deux hauteurs K et k, M. Quincke trouve que, si la goutte a un assez grand diamètre, et si l'on représente la densité de la substance par σ, la tension, qu'il désigne par α, est exprimée par la formule simple :

$$\alpha = \frac{\sigma}{2}(K - k)^2.$$

Il applique aussi la même méthode à quelques métaux fondus : il obtient, par exemple, pour la tension de l'or pur fondu, la valeur 131,5. Ses résultats s'accordent avec ceux de la Note précédente pour les sels qu'il a soumis aux deux procédés, sauf pour ceux à l'égard desquels le premier de ces procédés amenait une décomposition superficielle.

§ 164. Dupré a réuni en un seul ouvrage les sept Mémoires dont j'ai cité les trois derniers au § 161 ; cet ouvrage, publié en 1869, et intitulé *Théorie mécanique de la chaleur*, renferme plusieurs additions importantes :

Dans ses Mémoires séparés, l'auteur avait traité, en faisant intervenir la tension, un grand nombre de phénomènes capillaires ; dans l'ouvrage actuel, il complète cette étude par un extrait d'un Mémoire de son fils, extrait contenant l'application des mêmes méthodes 1° aux faits résultant du soulèvement graduel d'une plaque solide adhérente à la surface d'un liquide ; 2° au phénomène connu des fils de matières denses flottant sur un liquide, par exemple des aiguilles d'acier flottant sur l'eau.

Dupré donne ensuite un nouveau moyen d'arriver, par l'expérience et le calcul, à la valeur de la tension à la surface commune de deux liquides qui ne se mêlent pas : une goutte fort petite de l'un de ces liquides est immergée très-peu profondément dans l'autre liquide, et communique avec un appareil manométrique indiquant la pression qu'elle exerce sur elle-même ; le liquide

ambiant est contenu dans une capsule d'un grand diamètre. Alors, désignant par r le rayon de la gouttelette, par z la pression mesurée, et par F_2 la tension à la surface commune, Dupré trouve des relations d'où l'on déduit aisément :

$$F_2 = \frac{rz}{2}.$$

Cette formule coïncide avec celle qui exprime la tension d'une lame liquide en fonction du rayon et de la pression d'une bulle de ce liquide (§ 158), savoir $t = \frac{rp}{2}$, et l'on comprend aisément que cela doit être quand la gouttelette est immergée assez peu profondément pour qu'on puisse négliger la pression hydrostatique.

Dupré parvient aussi à la condition nécessaire et suffisante pour qu'une goutte liquide s'étale en lame mince sur la surface d'un autre liquide. Cette condition, telle qu'il la donne, n'est pas exprimée immédiatement en fonction des tensions; mais on la modifie aisément dans ce sens au moyen des formules de l'auteur, et l'on trouve alors, en désignant par F et F_1 les tensions respectives du liquide dont la goutte est formée et de celui sur lequel on la dépose :

$$F_1 > F + F_2.$$

C'est la condition déjà trouvée par M. Marangoni (§ 160bis).

§ 165. Dans une Note de 1869, Note dont j'ai parlé au § 127, M. Quincke m'attribuant, par erreur, une opinion qui est la sienne, avance, comme je l'ai dit, qu'une lame liquide ne peut plus subsister lorsque son épaisseur devient inférieure au double du rayon de l'attraction moléculaire. Il se fonde sur ce que si, dans une portion de l'étendue d'une lame, l'épaisseur devient

inférieure à la limite ci-dessus, la tension de cette portion doit diminuer, et qu'alors les portions environnantes doivent tirer à elles le liquide de la première et amincir ultérieurement celle-ci, jusqu'à la faire éclater. On ne peut objecter qu'il n'en serait plus ainsi dans le cas où la lame tout entière serait uniformément amincie au-dessous de la limite en question ; car cette lame serait nécessairement attachée par son bord à quelque solide, à la surface d'un liquide, ou à une autre lame par l'intermédiaire d'une petite masse plus épaisse qui conserverait ainsi une tension plus forte.

Le principe de M. Quincke est sans doute vrai en général ; cependant une expérience que j'exposerai plus loin (§ 172), paraît indiquer que lorsqu'il n'y a, entre deux portions d'une même lame, qu'une différence très-faible de tension, la lame peut se maintenir.

§ 166. En 1869 également, M. Lüdtge a étudié(1) d'une manière spéciale, au point de vue des tensions, le phénomène de l'étalement d'un liquide en lame mince sur un autre liquide. Il arrive à la loi suivante :

Toutes les fois que deux liquides à tensions respectives différentes satisfont à la condition que leur adhésion mutuelle surpasse la moindre des deux tensions, une goutte du liquide auquel appartient cette moindre tension s'étale à la surface de l'autre liquide, et l'inverse n'a jamais lieu.

Cette loi coïncide avec celle de Dupré (§ 164) telle que ce savant l'exprime dans son ouvrage(2), si l'on admet que, lorsque la relation de Dupré est satisfaite, le liquide

(1) *Ueber die Ausbreitung der Flüssigkeiten auf einander* (ANN. DE M. POGGENDORFF, vol. CXXXVII, p. 362).

(2) Il y a, dans la formule de Dupré, une erreur de signe qu'on reconnaît aisément.

de la goutte a nécessairement moins de tension que l'autre liquide, ce qui sans doute est vrai.

M. Lüdtge décrit la curieuse expérience que voici : si, dans un anneau horizontal en fil de fer de deux centimètres au plus de diamètre, on produit une lame d'huile, et qu'on mette en contact avec elle une goutte de solution de savon, on voit aussitôt ce dernier liquide s'étendre en une lamelle circulaire, qui grandit et semble repousser l'huile jusqu'à l'anneau métallique, de sorte qu'à la fin la lame d'eau de savon s'est complétement substituée à la lame d'huile. L'auteur ajoute que la même expérience réussit avec une petite lame d'eau sur laquelle on dépose une gouttelette d'huile : la lame d'eau est bientôt alors remplacée par une lame d'huile, qu'on peut, à son tour, remplacer, comme ci-dessus, par une lame d'eau de savon. M. Lüdtge pense que tout liquide susceptible de s'étaler sur un autre, peut ainsi remplacer ce dernier sous forme de lame ; il regarde conséquemment ces phénomènes comme des effets de tension.

§ 167. Nous avons encore, en 1869, un Mémoire remarquable[1] de M. Van der Mensbrugghe. Des mouvements singuliers produits, dans certaines circonstances, à la surface des liquides, avaient exercé depuis longtemps la sagacité des physiciens, et avaient donné lieu à une foule d'hypothèses divergentes : tels sont la rotation et les déplacements spontanés des parcelles de camphre flottant sur l'eau, l'espèce de répulsion qu'éprouve la surface de ce liquide au contact ou même à la simple approche d'une gouttelette d'un liquide volatil, etc.

Dutrochet avait essayé d'expliquer l'ensemble de ces

(1) *Sur la tension superficielle des liquides considérée au point de vue de certains mouvements observés à leur surface* (ACAD. DE BELGIQUE, t. XXXIV DES MÉM. COURONNÉS ET MÉM. DES SAVANTS ÉTRANGERS).

phénomènes en admettant qu'à la surface de tous les liquides existe une certaine force motrice, dont il ignore la nature, et qu'il nomme *force épipolique.* M. Van der Mensbrugghe montre que la force épipolique de Dutrochet n'est autre chose que la tension ; il fait voir, par des expériences variées et de nombreuses mesures, que tous les phénomènes dont il s'agit sont dus à des différences de tension. Ainsi qu'on l'a vu, M. Marangoni, M. J. Thomson et Dupré en avaient déjà expliqué quelques uns par de semblables différences; mais M. Van der Mensbrugghe étend le même principe à toute la série, et groupe ainsi sous un seul point de vue des faits qui semblaient n'avoir entre eux aucune liaison.

Quant à M. Lüdtge, qui fait aussi intervenir (§ précéd.) les différences de tension, il s'occupait de ses recherches à Berlin en même temps que M. Van der Mensbrugghe travaillait aux siennes à Gand, et les deux Mémoires ont paru presque simultanément.

M. Van der Mensbrugghe décrit d'abord des expériences qui montrent que, suivant le sens de la différence des tensions, une gouttelette d'un liquide volatil approchée de la surface d'un autre liquide y détermine un courant centrifuge ou un courant centripète.

A l'égard d'une goutte liquide déposée sur un autre liquide, et qui, au lieu de s'y étaler, prend la forme lenticulaire, M. Van der Mensbrugghe cherche, au moyen des tensions respectives de la surface du liquide ambiant et des deux faces de la lentille, la relation analytique nécessaire pour l'équilibre de forme de cette lentille, et en déduit, pour le cas de l'étalement, une condition qui revient aussi, au fond, à celle de M. Marangoni.

Dans ses expériences sur ce dernier phénomène,

M. Van der Mensbrugghe emploie encore un anneau en fil de soie fin (§ 162) qu'il place doucement sur la surface du liquide, après l'avoir mouillé de celui-ci ; puis, à l'intérieur du contour irrégulier formé par ce fil, il dépose une gouttelette d'un liquide satisfaisant à la condition de l'étalement ; aussitôt l'anneau de fil se tend, et dessine une circonférence de cercle.

L'auteur passe alors à la recherche de la condition analytique de l'équilibre d'une calotte sphérique laminaire reposant sur un liquide, les tensions respectives de ce liquide et de celui de la lame pouvant être égales ou inégales ; il parvient ainsi à une formule que je ne rapporterai pas maintenant, parce qu'elle sera mieux comprise quand j'aurai exposé certains faits relatifs aux calottes laminaires ; on la trouvera au § 216. Mais je puis indiquer ici une vérification à laquelle l'auteur soumet cette formule pour le cas de deux liquides différents : elle lui montrait que si l'on gonfle une bulle de savon de 3 à 4 centimètres de diamètre, et qu'on la dépose sur une grande surface d'eau pure, la calotte dans laquelle elle se transforme devait s'affaisser considérablement en s'étendant, de manière à ne faire avec l'horizon, à son bord, qu'un angle d'environ 45° ; or l'expérience a pleinement confirmé cette déduction. En outre, la lame s'amincit avec une extrême rapidité, offre de vives couleurs, et crève après une durée très-courte ; c'est que l'eau environnante attire à elle, par son excès de tension, le liquide qui constitue la lame.

L'auteur observe, comme M. Lüdtge, des substitutions d'une lame à une autre : il avance, par exemple, qu'une calotte de solution d'albumine reposant sur de l'eau de savon se trouve bientôt remplacée par une calotte de ce dernier liquide.

Il explique encore par une différence de tension les courants ascensionnels qui se manifestent quand on verse lentement de l'eau dans un vase de manière que le liquide glisse le long de la paroi intérieure de celui-ci : il constate que ces courants ne se produisent que lorsque la paroi n'est pas parfaitement nettoyée, et qu'ainsi la surface de l'eau qui s'accumule dans le vase perd une partie notable de sa tension par la présence d'une couche graisseuse imperceptible.

D'après lui, les mouvements du camphre sur l'eau proviennent de ce que le liquide se charge irrégulièrement de camphre autour de la parcelle flottante, et diminue ainsi en tension, mais de quantités qui varient successivement dans les différents azimuts ; les portions de la surface de l'eau plus éloignées tirent alors dans tous les sens la portion camphrée et, par suite, la parcelle, en agissant avec plus d'intensité tantôt dans un sens, tantôt dans un autre. L'auteur constate, en effet, que la tension de l'eau camphrée n'est que les 0,6 environ de celle de l'eau pure.

On savait que, pour arrêter les mouvements de la parcelle, il suffit de plonger le bout du doigt dans l'eau ; c'est, suivant l'auteur, qu'une matière grasse émanée de la peau s'étend alors rapidement sur la surface liquide, et en amoindrit la tension ; il vérifie la chose par des mesures, et s'assure, en outre, que le doigt parfaitement dégraissé ne produit plus d'effet.

On savait encore que de petits fragments de plusieurs autres substances, telles que les acides benzoïque, succinique et citrique, certains butyrates, etc., se meuvent sur l'eau à la manière du camphre ; l'auteur prouve, par de nouvelles mesures, que ces corps abaissent aussi la tension de l'eau.

Le lecteur trouvera, dans le Mémoire de M. Van der Mensbrugghe, l'explication, par les mêmes principes, d'autres faits encore.

§ 168. Dans une lettre adressée au Journal *Les Mondes* (1) peu de temps après la publication du Mémoire ci-dessus, M. Van der Mensbrugghe fait connaître plusieurs nouvelles expériences concernant surtout la substitution spontanée d'une lame à une autre; voici les plus curieuses :

1° Une calotte de solution de saponine reposant sur de l'eau distillée vérifie encore la formule du Mémoire précédent : celle-ci donne approximativement, dans le cas dont il s'agit, 74° pour l'angle formé par la lame, à son bord, avec la surface horizontale de l'eau, et l'aspect de la calotte confirme ce résultat, autant que l'œil peut en juger.

2° Si, au sommet de la même calotte, on dépose une grosse goutte d'eau de savon, ce dernier liquide se substitue bientôt, dans toute la lame, à la solution de saponine, et aussitôt la calotte s'affaisse en s'étendant, de manière à reproduire les résultats rapportés dans le paragraphe précédent.

3° On fait en sorte, par un procédé que l'auteur indique, qu'une bulle de solution d'albumine d'un diamètre notablement moindre que 25 millimètres (2) adhère à tout le contour intérieur d'un anneau horizontal en fil de fer ayant ce dernier diamètre ; la lame prend alors la forme d'une lentille bi-convexe creuse à courbures égales; or si l'on dépose, au sommet de la face supérieure de celle-ci, une goutte de solution de savon, on voit, en même temps que la substitution s'opère, cette

(1) 2me série, 7me année, tome XXI, page 302.

(2) Dans l'article des *Mondes* il y a *centimètres*, par erreur.

face prendre un plus grand développement en augmentant ainsi de courbure, tandis que la face inférieure devient, au contraire, moins courbe. C'est que les tensions respectives des deux liquides étant inégales, il faut, pour que les deux lames exercent la même pression sur l'air intérieur, que leurs courbures soient aussi inégales.

4° Quelques gouttes d'éther sulfurique versées sur la mousse de l'eau de savon ou d'un autre liquide, font disparaître aussitôt cette mousse; c'est que l'éther ayant une tension très-faible, se substitue partout aux lamelles de la mousse, et que les lamelles d'éther n'ont qu'une persistance extrêmement courte.

§ 169. Enfin il nous reste à mentionner un extrait d'un travail (1) de M. Quincke, extrait publié à la fin de 1869, en attendant l'impression du Mémoire in-extenso. Mossotti et Dupré avaient indiqué, on l'a vu (§§ 150bis et 164), des moyens de déterminer la tension à la surface commune de deux liquides en contact, mais ces moyens donnent sans doute des résultats peu précis; M. Quincke emploie, pour résoudre la même question, la méthode qu'il a exposée dans la troisième des Notes résumées au § 163 : dans un vase partiellement rempli du liquide le moins dense, ou, comme il l'appelle, du liquide 2, il introduit une quantité convenable de l'autre liquide, ou liquide 1, qui s'étale, sur le fond horizontal du vase, en une large goutte dont la surface supérieure est sensiblement plane. M. Quincke mesure ensuite la quantité que, dans la Note rappelée ci-dessus, il désigne par $K - k$; alors, σ_1 et σ_2 étant respectivement les densités des deux

(1) *Ueber die Capillaritätserscheinungen an der gemeinschaftlichen Oberfläche zweier Flüssigkeiten* (BULLET. DE LA SOC. ROY. de GÖTTINGUE, 1869, n° 19, p. 383).

liquides, la tension à la surface commune, tension que l'auteur nomme α_{12}, lui est donnée par la formule :

$$\alpha_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}(K - k)^2.$$

Voici une partie des valeurs obtenues de cette manière à la température de 20°.

LIQUIDES.	TENSION A LA SURFACE COMMUNE.
Mercure et eau.	42,58
Mercure et huile d'olive. . . .	34,19
Mercure et essence de térébenthine	25,54
Sulfure de carbone et eau. . .	4,26
Huile d'olive et eau	2,096
Huile d'olive et alcool	0,226
Huile d'olive et alcool dilué de densités à fort peu près égales.	0,693

Dans le cas de l'huile d'olive et de l'alcool dilué de même densité, le procédé ne paraît pas applicable; l'extrait que nous résumons n'est pas suffisamment explicite sur le moyen auquel l'auteur a eu recours pour lever la difficulté [1].

M. Quincke tire encore de la même méthode l'évaluation de la tension à la surface libre des liquides qui mouilleraient la surface solide sur laquelle on les déposerait. Pour cela, il fixe, à une certaine hauteur dans le liquide, une plaque de verre horizontale, sous laquelle il fait passer une grosse bulle d'air; celle-ci s'aplatit contre la face inférieure de la plaque, et, si l'on mesure alors les distances K et k à cette plaque,

(1) Voir le Mémoire in extenso indiqué sous le n° 2 au § 508.

il suffit de supprimer σ_1 dans la formule et de faire abstraction du signe, pour avoir le résultat cherché. L'auteur obtient ainsi, par exemple, pour la tension de l'eau à 20°, la valeur 8,253.

Il reprend ensuite la recherche de la tension à la surface commune de deux liquides, et il indique trois autres méthodes mais moins générales que la première ; deux d'entre elles reposent, comme celle de Mossotti sur la mesure de l'élévation ou de l'abaissement de la surface de contact des deux liquides quand ceux-ci sont superposés dans un même tube capillaire.

M. Quincke cherche aussi la condition nécessaire pour qu'un liquide s'étale en lame mince sur un autre, et arrive à une loi qui coïncide encore avec celle de M. Marangoni [1].

§ 170. Les recherches successives dont l'analyse est exposée dans ce qui précède, fournissent donc ces résultats généraux :

1° La tension existe bien réellement dans toute surface liquide, et, par suite, dans toute lame liquide.

2° Cette tension est indépendante des courbures de la surface ou de la lame, elle est la même dans toute l'étendue d'une même surface ou d'une même lame, et la même aussi, en chaque point, dans toutes les directions tangentielles autour de ce point.

3° Elle est indépendante de l'épaisseur des lames, du moins tant que cette épaisseur n'est pas inférieure au double du rayon d'activité sensible de l'attraction moléculaire.

4° Elle varie avec la nature des liquides.

(1) Pour les recherches postérieures à 1869, voir les articles inscrits au § 508 sous les nos 3, 4, 6, 8, 9, 10, 16, 18, 20, 23, 27, 28, 29, 31, 33, 34, 36, 39, 40, 41, 44 et 45.

5° Pour un même liquide, elle varie en sens inverse de la température; mais, aux températures ordinaires, elle éprouve peu de changements.

6° On possède un grand nombre de procédés pour la mesure expérimentale de la tension, et chacun de ces procédés conduit à une expression de la tension en fonction des données de l'expérience. Le plus commode est sans contredit le premier de Dupré, c'est-à-dire celui de l'aréomètre.

7° Quant à la cause de la tension, quatre hypothèses ont été proposées : en premier lieu, celle de Segner, que je n'ai pas bien comprise, et suivant laquelle la tension proviendrait de l'attraction mutuelle des molécules de la couche superficielle dans le sens tangentiel et de la courbure de cette couche; en second lieu, celle qui est commune à Mossotti, au Dr Hough et à Dupré, et qui fait dépendre la tension de la non-symétrie des actions moléculaires dans l'épaisseur de la couche superficielle, avec de légères différences dans la manière d'envisager cette non-symétrie; en troisième lieu, celle de M. Hagen, qui attribue la tension à une densité plus grande de la couche superficielle ; enfin celle de M. Lamarle, qui considère la tension comme due à ce que, par une contraction de la couche superficielle, une portion des molécules de cette couche passant dans l'intérieur et diminuant ainsi d'écartement, la tendance générale de l'attraction au rapprochement des molécules se satisfait en partie.

§ 171. Selon moi, la vraie cause de la tension, si elle n'est pas énoncée d'une manière tout à fait explicite, est du moins suffisamment indiquée par MM. Henry et Lamarle dans leurs démonstrations de l'existence de la tension par les sphères laminaires (§§ 151 et 158). Il est

incontestable, depuis le travail de Laplace, que, si l'on considère seulement l'effet des courbures, une couche superficielle convexe exerce sur le liquide une pression normale en chaque point, et une couche superficielle concave exerce, au contraire, une traction normale aussi en chaque point; mais, dans l'état d'équilibre, cette pression ou cette traction lutte contre une résistance provenant en général d'actions hydrostatiques; or il est visible qu'une couche superficielle courbe ainsi pressant ou tirant et qui rencontre une résistance opposée, doit être tendue, comme l'est une vessie gonflée qui presse sur l'air intérieur, ou, en d'autres termes, que les molécules de cette même couche doivent être dans un état d'écartement forcé suivant le sens tangentiel. Si l'on veut, c'est la réciproque de la théorie de Young : celui-ci suppose la tension, et fait voir que les tractions tangentielles qu'elle détermine autour d'un même point donnent pour résultante une pression normale si la surface est convexe, et une traction normale si la surface est concave; or, comme l'a montré Laplace, cette pression ou cette traction existe par le seul effet des attractions moléculaires; on peut donc la décomposer, autour de chaque point, en tractions tangentielles, lesquelles constituent une tension.

Poisson paraît avoir eu une opinion analogue; dans le préambule de sa *Nouvelle théorie de l'action capillaire*, l'illustre géomètre dit, en parlant de Young :

« Il s'appuyait sur l'identité de la surface du liquide avec celle d'une membrane également tendue en tous ses points, identité qui ne peut être que la conséquence et non le principe de la solution du problème. »

La tension est donc un résultat nécessaire des courbures, et l'on comprend cependant qu'elle soit indépen-

dante des valeurs de ces courbures. En effet, considérons, pour simplifier, en un point d'une section normale d'une surface liquide convexe, les deux composantes tangentielles et la partie élémentaire de la pression qui leur donne naissance. Si la courbure diminue, par exemple, cette partie de la pression diminue en même temps; mais, d'autre part, l'angle entre les deux composantes augmente, de sorte que ces composantes, ou tensions élémentaires, peuvent conserver la même valeur qu'avec la première courbure. Si la courbure diminue jusqu'à s'annuler, la partie envisagée de la pression s'annule aussi, et les deux composantes se trouvent dans le prolongement l'une de l'autre ; il y a donc alors indétermination; c'est le cas des surfaces liquides planes, et l'on est en droit de se demander comment la tension s'engendre dans de semblables surfaces. Mais il faut remarquer que celles-ci sont toujours limitées par des portions à fortes courbures transversales : c'est ce qui a lieu, par exemple, au bord de la surface d'un liquide contenu dans un vase, et c'est encore avec l'intermédiaire de petites portions de ce genre qu'une lame liquide adhère par son bord à la surface d'un liquide, à un fil solide, ou à d'autres lames. Bien que, dans ces deux derniers cas, les portions dont il s'agit soient si étroites qu'elles échappent pour ainsi dire à la vue, on comprend, à priori, la nécessité de leur existence; en effet, les faces d'une lame ne peuvent aboutir brusquement à la couche qui mouille le fil solide; elles doivent évidemment se recourber près de cette couche, pour y aboutir tangentiellement, et le même fait doit se produire le long de la ligne suivant laquelle une lame adhère à d'autres lames; nous décrirons d'ailleurs (§ 219) des expériences où la chose se montre aux yeux. Maintenant, la tension

que possèdent, par suite de leurs courbures, ces portions de raccordement, doit, en vertu de la continuité, se propager à toute l'étendue des surfaces qu'elles bordent. Cette explication m'a été suggérée par M. Lamarle.

§ 172. J'ai annoncé (§ 161) des expériences curieuses relatives à l'effet de la chaleur sur la tension des lames liquides; en voici une qui est due à mon fils Félix ; j'en rapporterai une autre au § 208 :

Une bulle de liquide glycérique d'un décimètre de diamètre étant déposée sur un anneau, on attend qu'elle ait pris, au moins à son sommet (§ 108), une teinte autre que le rouge ou le vert des derniers ordres; alors il suffit d'approcher avec précaution le bout du doigt aussi près que possible de ce sommet, pour voir la teinte de ce même sommet se modifier sur un espace de trois à quatre centimètres de diamètre, de manière à accuser un amincissement : si, par exemple, le sommet est jaune, il passe au vert; quand le doigt est assez chaud, il y a quelquefois production de deux teintes successives ; enfin dès qu'on enlève le doigt, la teinte originaire reparaît. C'est à cette expérience que j'ai fait allusion à la fin du § 165.

§ 173. Nous allons maintenant nous occuper d'un ordre de faits intimement liés à la tension ; je veux parler de la constitution des systèmes de lames.

Commençons par un cas très-simple : on sait que lorsqu'une bulle d'air qui monte dans un liquide arrive à la surface de celui-ci, elle ne brise pas immédiatement cette surface, mais y soulève une lame en forme de calotte sphérique ; et si le liquide est du liquide glycérique, la calotte laminaire ainsi engendrée persiste longtemps. Or, imaginons qu'une seconde bulle d'air s'élève du fond du vase, et qu'au moment où elle est près

d'atteindre la surface, elle se trouve en partie sous la première lame ; elle déterminera aussi la formation d'une lame, qui soulèvera nécessairement la première d'un côté, de sorte que les deux quantités d'air respectivement emprisonnées par ces deux lames seront séparées par une portion de la seconde, comme par une cloison liquide. Mais cette cloison ne gardera pas la courbure du reste de la seconde lame, ainsi que je vais le faire voir.

En vertu de leur nature liquide, des lames ne peuvent évidemment se rencontrer sous des angles à arêtes linéaires : il faut, pour la continuité (§ 171), qu'il se forme, tout le long de la ligne de rencontre, une petite masse à surfaces fortement concaves dans le sens perpendiculaire à cette même ligne; dans le cas dont il s'agit, cette masse est trop minime pour être distinguée, mais, ainsi que je l'ai déjà annoncé, nous en vérifierons plus loin l'existence; or les deux calottes et la cloison étant ainsi unies par une petite masse qui a ses courbures propres, il est clair que cette petite masse établit une entière indépendance entre les courbures respectives des trois lames.

Cela étant, remarquons que la cloison doit constituer aussi une portion de sphère, car elle se trouve dans les mêmes conditions que les deux autres lames, c'est-à-dire qu'elle a, comme celles-ci, pour limites la petite masse de jonction et le liquide du vase. Quant à sa courbure, elle dépend évidemment de la différence des actions exercées sur ses deux faces par les deux portions d'air emprisonnées. Si ces deux portions d'air sont égales, les deux lames appartiendront à des sphères égales, qui presseront les deux volumes d'air avec la même intensité, et conséquemment la cloison, soumise sur ses deux faces

à des actions égales, n'aura aucune courbure, ou, en d'autres termes, sera plane ; mais si les deux quantités d'air sont inégales, auquel cas les deux lames appartiendront à des sphères de diamètres différents, et, par suite, presseront inégalement ces deux quantités d'air, la cloison sollicitée sur ses deux faces par des actions inégales, se bombera du côté où l'élasticité de l'air est la moindre, jusqu'à ce que l'effort qu'elle exerce, en vertu de sa courbure, du côté de sa face concave, contrebalance l'excès d'élasticité de l'air qui baigne cette face.

Soient ρ, ρ' et r les rayons des sphères auxquelles appartiennent respectivement la plus grande lame, la plus petite et la cloison, et soient p, p' et q les pressions respectives qu'elles exercent, en vertu de leurs courbures, sur l'air qui baigne leurs faces concaves. Ces pressions étant (§§ 116 et 121) en raison inverse des diamètres, et conséquemment des rayons, on aura :

$$\frac{p}{q}=\frac{r}{\rho}, \text{ et } \frac{p'}{q}=\frac{r}{\rho'};$$

mais, d'après ce que nous avons vu plus haut, il faut, pour l'équilibre, que l'on ait :

$$q=p'-p;$$

d'où

$$1=\frac{p'}{q}-\frac{p}{q}.$$

Portant dans cette dernière équation les valeurs ci-dessus de $\frac{p'}{q}$ et de $\frac{p}{q}$, et résolvant par rapport à r, il vient :

$$r=\frac{\rho\rho'}{\rho-\rho'},$$

formule qui donnera le rayon de la cloison, quand on connaîtra ceux des deux lames.

Si, par exemple, ces deux lames appartiennent à des sphères égales, on a $\rho = \rho'$, et la formule donne $r =$ l'infini ; c'est-à-dire qu'alors la cloison est plane, ainsi que nous l'avons déjà trouvé. Si le rayon de la plus petite des deux lames est moitié de celui de la plus grande, en d'autres termes, si l'on a $\rho' = \frac{1}{2}\rho$, la formule donne $r = \rho$; dans ce cas, la courbure de la cloison sera conséquemment égale à celle de la plus grande lame.

Pour compléter l'étude de notre système laminaire, il ne nous reste plus qu'à chercher sous quels angles se joignent les deux calottes et la cloison ; or ces trois lames possédant des tensions identiques (§ 170), et tirant ainsi leur arête commune avec des forces égales, il est clair qu'elles doivent faire entre elles, à cette arête, des angles égaux, angles qui sont conséquemment de 120°. Je fais ici, bien entendu, abstraction de la petite masse de jonction, à cause de son extrême exiguité.

Nous verrons bientôt tous ces résultats vérifiés par l'expérience.

§ 174. Si la bulle d'air qui fait naître la seconde lame aboutit à la surface du liquide assez loin de la première lame pour que les deux calottes sphériques soient complètes et isolées, ou bien, ce qui revient au même, si l'on dépose sur le liquide deux bulles suffisamment éloignées l'une de l'autre, bulles qui se transforment aussitôt en calottes sphériques, ces dernières, sollicitées par les actions capillaires à la manière des corps légers flottants, se rapprocheront par degrés jusqu'au contact, du moins si elles n'étaient pas séparées originairement par un trop grand intervalle. Pour faire comprendre ce qui doit arriver ensuite, rappelons un fait que manifestent, au sein de mon mélange alcoolique, les sphères d'huile

pleines. Lorsque deux semblables sphères viennent à se toucher, leur ensemble n'est point à l'état d'équilibre; aussitôt le contact établi, les deux sphères s'unissent pour n'en former qu'une seule, et il est facile d'en saisir la raison : on ne saurait produire ce contact en un point unique; il a lieu nécessairement suivant une petite surface, de sorte que les deux masses n'en forment plus qu'une en réalité; or puisque celle-ci est finie et entièrement libre, et qu'elle est de révolution, la seule figure d'équilibre qu'elle puisse affecter est (§§ 37 et 78) celle d'une sphère unique. Maintenant il est visible que la même chose doit tendre à se produire à l'égard de nos deux calottes sphériques laminaires, dès que les deux petites masses annulaires à surfaces concaves dans le sens méridien qui règnent le long de leurs bases et les rattachent au liquide, se sont unies à l'endroit de leur contact, c'est-à-dire que les deux calottes tendront à n'en former qu'une seule; mais pour que cette tendance pût avoir son plein effet, il faudrait que les deux lames s'ouvrissent à l'endroit du contact, et comme la cohésion s'y oppose, on comprend que l'ouverture sera remplacée par une cloison, et qu'ainsi le système se coordonnera comme celui du paragraphe précédent.

§ 175. L'existence des cloisons est un fait bien connu de tous ceux qui se sont amusés à faire des bulles de savon; mais j'avais à soumettre au contrôle de l'expérience les résultats établis dans ce qui précède, et d'abord ceux qui concernent la courbure de la cloison et les angles sous lesquels cette cloison et les deux lames se coupent.

Dans ce but, j'ai fait tracer, sur trois feuilles de papier, trois figures représentant les bases de trois systèmes formés chacun de deux portions de sphères

laminaires et d'une cloison. J'entends par la base d'un semblable système l'ensemble des arcs de cercle suivant lesquels il s'appuie sur la surface du liquide, abstraction faite des petites masses annulaires. Voici par quelle méthode on a tracé les dessins dont il s'agit :

Supposons deux lames formant primitivement deux sphères complètes, sphères qui se sont ensuite en partie pénétrées de manière à donner lieu à une cloison, et imaginons tout ce système coupé par un plan passant par les centres des deux lames ; il est clair que le centre de la sphère à laquelle appartient la cloison se trouvera sur la droite qui contient les deux centres ci-dessus.

Cela posé, les angles sous lesquels les deux lames et la cloison se rencontrent devant être de 120°, il est visible que les rayons des deux lames menés à un point de la ligne d'intersection de celles-ci feront entre eux un angle de 60°, et l'on verra aussi sans peine que le rayon de la cloison mené au même point fera également un angle de 60° avec celui des deux autres dont il est

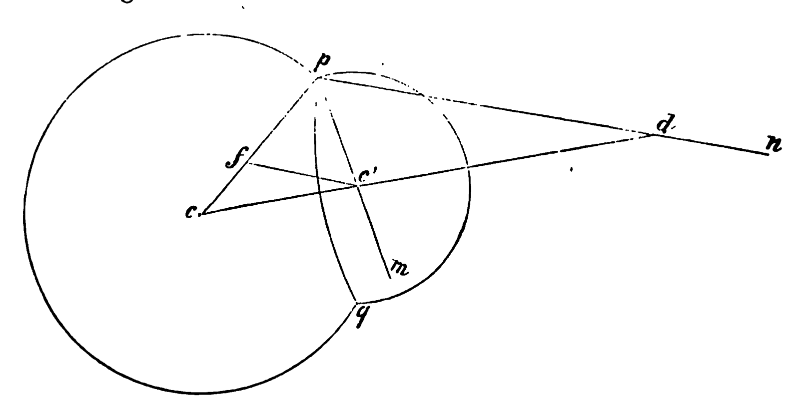
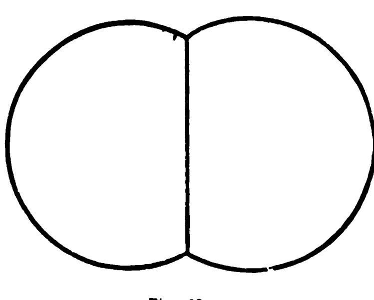


Fig. 61.

le plus près. Soit donc (*fig.* 61) p l'un des deux points où viennent aboutir les trois arcs suivant lesquels les

deux lames et la cloison sont coupées par le plan en question, plan que nous prendrons pour celui de la figure, et soit $pc = \rho$ le rayon de la plus grande lame. Menons les droites indéfinies *pm* et *pn* de telle manière que les angles *cpm* et *mpn* soient chacun de 60°. Sur *pm* prenons *pc'* égale à ρ', c'est-à-dire au rayon de la plus petite lame; joignons *cc'*, et prolongeons la droite jusqu'à sa rencontre, en *d*, avec *pn*. Les trois points *c*, *c'* et *d* seront évidemment les trois centres, et *pd* sera le rayon *r* de la cloison, de sorte que si, de ces trois centres et avec ces rayons, on trace trois portions de circonférences aboutissant d'une part au point *p* et de l'autre à son symétrique *q*, on aura, comme le montre la figure, la coupe du système des deux lames et de la cloison. Seulement cette construction, considérée comme représentant la base d'un système laminaire, suppose que les deux calottes, abstraction faite de leur pénétration mutuelle, sont des hémisphères, condition qui n'est jamais rigoureusement remplie, du moins quand les calottes reposent sur une couche épaisse de liquide (§§ 214 à 216).


Fig. 62.

Dans les trois dessins dont j'ai parlé, et qui sont représentés au tiers de leur grandeur par les *fig.* 62, 63 et 64, les arcs ont été marqués en traits larges d'environ un millimètre, on verra bientôt pourquoi. Dans le premier dessin, les diamètres des deux lames étaient égaux; dans le second, ils étaient comme 2 à 1; et, dans le troisième, comme 3 à 1. Pour employer l'un de ces dessins, on le plaçait sur une table, et l'on posait par

dessus une plaque de verre mince, dont on mouillait ensuite la face supérieure avec du liquide glycérique. Cela fait, on gonflait une bulle du même liquide, que l'on déposait sur la plaque au-dessus de la portion de circonférence qui représentait la base de la plus petite lame ; cette bulle s'y étalait aussitôt de manière à constituer une calotte ;

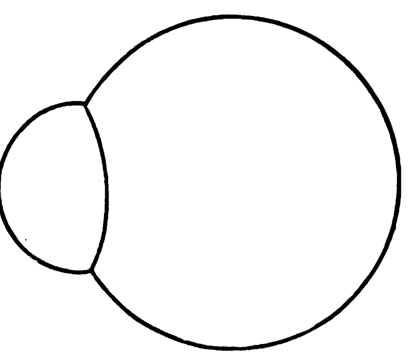


Fig 63.

on s'arrangeait de façon que la base de celle-ci eût un diamètre un peu moindre que la portion de circonférence en question. On gonflait alors une seconde bulle, que l'on déposait de même au-dessus de la portion de circonférence représentant la base de l'autre lame, et en s'arrangeant aussi de manière qu'après s'être étalée sur la plaque, elle eût un diamètre un peu trop petit. Comme, en

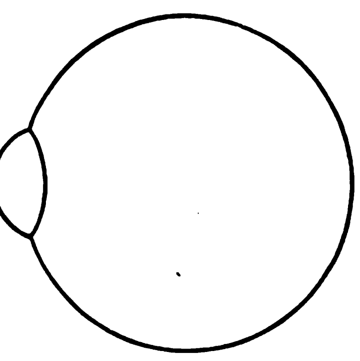


Fig. 64.

déposant cette seconde lame, on devait la mettre en contact avec la première, les deux calottes se pénétraient partiellement et demeuraient unies avec une cloison. Les choses étant ainsi préparées, on trempait l'orifice de la pipe dans le liquide glycérique, comme pour gonfler une bulle, puis on appliquait cet orifice vers la partie inférieure de la plus petite lame, on soufflait un peu,

puis on faisait la même opération pour l'autre lame, on revenait à la première, puis à la seconde, et ainsi de suite[1], en faisant glisser en même temps, de petites quantités, la plaque de verre sur le dessin, et, avec les ménagements convenables, on parvenait à donner aux deux lames les diamètres des portions de circonférences tracées, et alors la base du système laminaire obtenu, base formée de celles des deux lames et de celle de la cloison, recouvrait exactement le dessin. J'ai dit que les dessins étaient en traits larges ; c'est que ces traits doivent être vus à travers les petites masses annulaires ; s'ils étaient fins, les réfractions produites par les petites masses dont il s'agit empêcheraient de les distinguer. Ajoutons que, sur la plaque de verre, les calottes, toujours abstraction faite de leur pénétration mutuelle, sont exactement hémisphériques (§ 216), de sorte que la vérification ci-dessus ne laisse rien à désirer.

§ 175bis. Mais il reste un point à éclaircir : nous avons déterminé (§ 173) le rayon r de la cloison en partant des valeurs relatives des pressions respectivement exercées par les trois portions de calottes sphériques sur les deux quantités d'air emprisonnées. D'un autre côté, nous venons de construire ce rayon en partant de ce que la cloison et les deux lames doivent se rencontrer sous des angles de 120°. Or on ne voit pas à priori de relation nette entre les principes qui servent respectivement de bases à ces deux déterminations, et l'on peut se demander si les deux résultats coïncident; c'est ce que nous allons examiner.

(1) Cette opération s'effectuerait beaucoup plus aisément si l'on employait, au lieu de la pipe, un tube de verre effilé à l'une de ses extrémités; après avoir mouillé celle-ci de liquide glycérique, on l'introduirait dans la lame, et l'on soufflerait doucement par l'autre extrémité. A l'époque où mes expériences ont été faites, ce moyen, dont M. Lamarle a fait usage plus tard dans une autre circonstance (§ 204), ne s'était pas présenté à moi.

Prenons (*fig.* 61) $pf = pc'$, et joignons $c'f$; l'angle cpc' étant de 60°, le triangle fpc' sera équilatéral, et l'on aura conséquemment $fc' = pc' = \rho'$; par la même raison, l'angle $fc'p$ sera de 60° comme l'angle $c'pd$, d'où il suit que les droites fc' et pd seront parallèles; on pourra donc poser :

$$\frac{pd}{fc'} = \frac{pc}{fc};$$

enfin, remplaçant, dans cette formule, pd, fc' et pc par leurs valeurs respectives r, ρ' et ρ, et observant que fc est égal à $\rho - \rho'$, on en tirera :

$$r = \frac{\rho\rho'}{\rho - \rho'}.$$

C'est identiquement la valeur qu'avait donnée la première méthode; ainsi les deux principes, en apparence indépendants, conduisent au même résultat.

§ 176. Pour vérifier également les résultats du § 174, on déposait successivement, sur la surface d'une couche épaisse de liquide glycérique contenue dans un grand plat de porcelaine, deux bulles de ce même liquide, de manière que les deux calottes sphériques qu'elles formaient fussent séparées par un certain intervalle. Quand celui-ci était au plus d'un centimètre, les lames marchaient, en effet, l'une vers l'autre, et s'unissaient avec une cloison; seulement si les deux lames avaient de grands diamètres (10 centimètres ou plus), la cloison ne se produisait en général que lorsque la réunion avait lieu peu d'instants après la formation de ces lames; quand celles-ci étaient d'abord un peu trop distantes l'une de l'autre, de façon que le temps nécessaire pour leur rapprochement spontané fût assez long, elles s'unissaient sans cloison en se transformant en une seule grande calotte, sans doute

parce qu'elles étaient devenues trop minces, de sorte que la cloison naissante se brisait avant qu'on pût en constater l'existence.

§ 177. Si une troisième calotte sphérique laminaire s'accole à deux autres déjà unies, le système aura évidemment trois cloisons, savoir une provenant de la réunion des deux premières lames, et deux de la réunion de chacune de ces mêmes lames avec la troisième. Ces trois cloisons aboutiront nécessairement à un même arc de jonction, et, en supposant qu'elles aient encore des courbures sphériques, il faudra qu'aux lignes de jonction de chacune d'elles avec deux des lames, les angles soient encore de 120°; il faudra, en outre, par la raison donnée à la fin du § 173, qu'à l'arc de jonction de ces trois cloisons entre elles, les angles soient aussi de 120°.

Cela posé, voyons par quel moyen nous pourrons tracer la base d'un système de ce genre, de même que

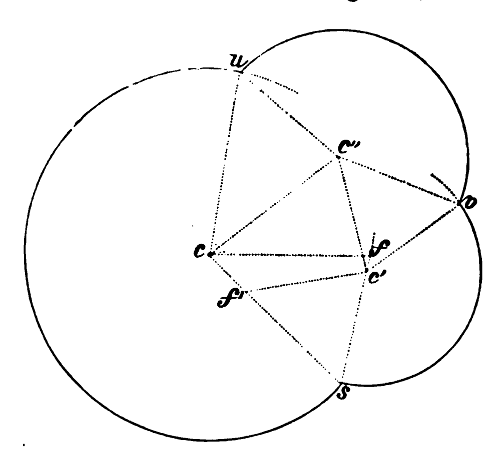


Fig. 65.

nous avons tracé (*fig.* 61) celle d'un système de deux lames. Après avoir décrit (*fig.* 65) les bases des deux premières lames, bases ayant pour centres c et c' et pour

rayons les longueurs données que nous désignerons encore par ρ et ρ', portons, à partir du point s où aboutissent ces deux bases, et sur les rayons sc et sc', deux longueurs sf' et sf égales entre elles et au rayon donné ρ'' de la troisième base, puis, des points c et c' comme centres et avec les longueurs cf et $c'f'$ comme rayons, traçons deux arcs de cercle ; leur point d'intersection c'' sera le centre de la base de la troisième lame, base qu'on décrira ensuite avec le rayon ρ''.

En effet, supposons le problème résolu et cette base tracée. Si l'on mène, du point u où elle aboutit à l'une des premières, les droites uc et uc'', qui seront respectivement égales à ρ et à ρ'', ces droites feront entre elles un angle de 60°, comme les droites sc et sc'; d'où il suit que le triangle cuc'' sera égal au triangle csf, dans lequel sc et sf sont aussi respectivement égaux à ρ et ρ'', et qu'ainsi cc'' sera égal à cf; par les mêmes raisons, le triangle $c'vc''$ sera égal au triangle $c'sf'$, et conséquemment $c''c'$ sera égal à $c'f'$.

Proposons-nous maintenant de tracer les bases des trois cloisons. Celles des trois lames étant décrites (*fig.* 66) par le tracé précédent, on déterminera, comme dans la *fig.* 61, le centre d de la cloison appartenant aux deux premières lames et partant de s, en menant sd faisant avec sc' un angle de 60°, jusqu'à sa rencontre, en d, avec la droite cc' prolongée ; on déterminera de même le centre f de la cloison appartenant à la première et à la troisième lame en menant uf faisant un angle de 60° avec $c''u$, jusqu'à sa rencontre, en f, avec cc'' prolongée ; enfin on déterminera encore par le même procédé le centre g de la troisième cloison. Il ne restera plus alors qu'à décrire, des points d, f et g comme centres, et avec les rayons ds, fu et gv, trois arcs de cercle

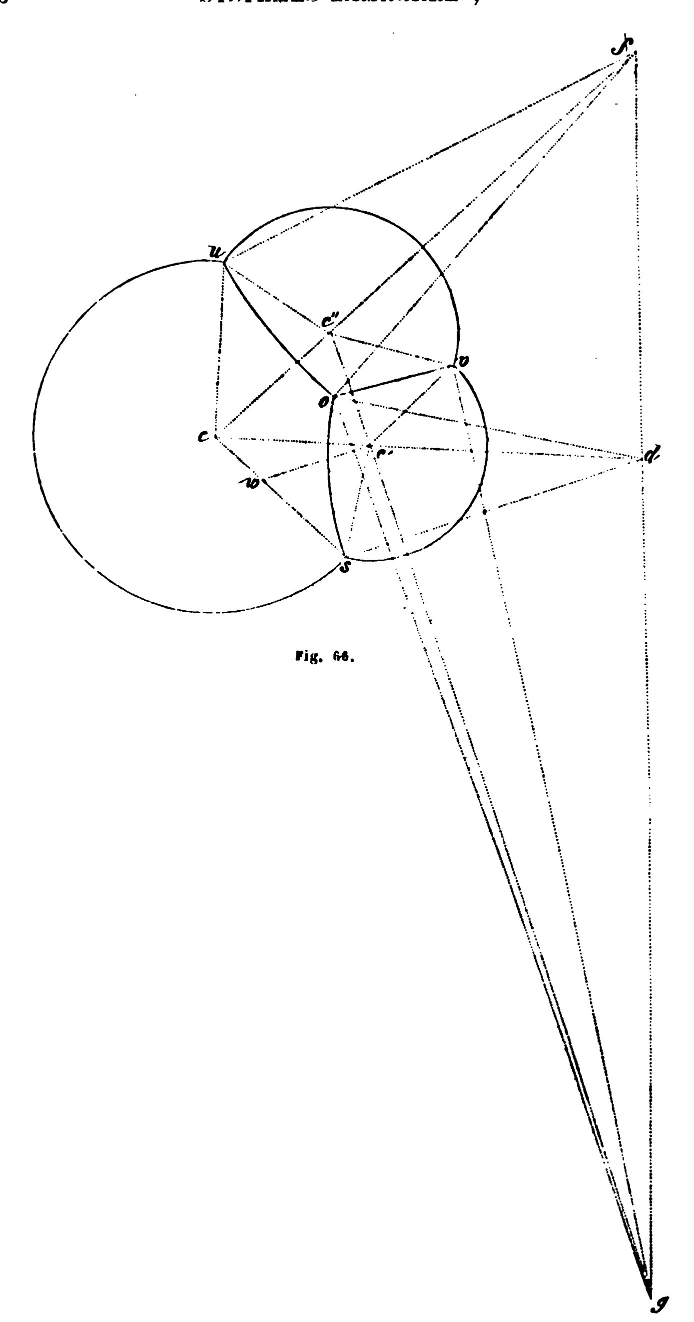


Fig. 66.

partant respectivement des points s, u et v, et se dirigeant vers le milieu de la figure; ces arcs seront les bases des trois cloisons, toujours dans l'hypothèse où ces cloisons seraient des portions de sphères.

Si l'on a construit la figure avec soin, on reconnaîtra : 1° que les arcs dont je viens de parler aboutissent tous trois à un même point o; 2° que les trois centres f, d et g sont disposés en ligne droite; 3° que si l'on joint le point o à ces trois centres, les angles fod et god sont égaux et de 60°.

§ 178. Mais comme on pourrait croire que ces résultats d'une construction graphique sont simplement très-approchés et non tout à fait exacts, je vais les établir d'une manière rigoureuse; c'est à M. Van der Mensbrugghe que je dois cette démonstration.

Démontrons d'abord que les trois centres f, d et g sont en ligne droite. Pour cela, répétant ce que nous avons fait dans la *fig.* 61, portons sur sc (*fig.* 66) une longueur $sw = sc' = \rho'$, et joignons $c'w$; nous savons que cette dernière droite sera parallèle à sd, et conséquemment nous pourrons poser

$$\frac{dc}{dc'} = \frac{sc}{sw} = \frac{\rho}{\rho'}.$$

Par la même raison, en considérant les deux portions de circonférences qui ont pour centres c et c'' et qui se coupent en u, on aura, en renversant seulement les deux rapports,

$$\frac{fc''}{fc} = \frac{\rho''}{\rho};$$

et enfin les deux portions de circonférences ayant pour centres c' et c'' et qui se coupent en v, donneront de même

$$\frac{gc'}{gc''} = \frac{\rho'}{\rho''}.$$

Multipliant ces trois égalités membre à membre, il vient :

$$\frac{dc \, . \, fc'' \, . \, gc'}{dc' \, . \, fc \, . \, gc''} = 1.$$

Remarquons maintenant : 1° que les trois centres *d*, *f* et *g* sont sur les prolongements des côtés du triangle *c c' c''*; 2° que les six quantités *dc*, *fc''*, *gc'*, *dc'*, *fc* et *gc''* sont les distances, comptées sur ces mêmes prolongements, des trois points *d*, *f* et *g* aux trois sommets *c*, *c'* et *c''*; 3° que, dans la dernière formule ci-dessus, les trois facteurs du numérateur représentent des droites dont deux quelconques n'ont pas d'extrémité commune, et qu'il en est de même des trois facteurs du dénominateur. Or on sait, par un théorème de la théorie des transversales, que lorsque la condition exprimée par cette formule est remplie à l'égard d'un triangle quelconque, les trois points en question, pris sur les prolongements des trois côtés, sont nécessairement en ligne droite. Nos trois centres *d*, *f* et *g* jouissent donc de cette propriété.

Ce premier point établi, démontrons les autres. Considérons le point *o* comme étant simplement l'intersection des deux arcs *uo* et *vo* ayant pour centres *f* et *g*; joignons *od*, *of* et *og*, et, sans chercher d'abord si *od* est bien réellement le rayon de l'arc ayant pour centre *d* et partant du point *s*, faisons voir que les angles *fod* et *god* sont chacun de 60°, ou, ce qui revient au même, que l'angle *fog* est de 120°, et que la droite *od* en est la bissectrice.

Cherchons d'abord à déterminer les longueurs *fd* et *gd*, et, à cet effet, considérons-les comme appartenant respectivement aux triangles *fcd* et *gc'd*, dans lesquels nous pourrons évaluer les côtés *fc*, *dc*, *gc'* et *dc'*, ainsi que les angles qu'ils comprennent. Pour arriver à ces der-

nières valeurs, calculons les côtés du triangle $cc'c''$. Au moyen du triangle csc', où les côtés cs et $c's$ sont respectivement ρ et ρ' et comprennent entre eux un angle de 60°, on trouve sans peine

$$cc' = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - \rho\rho'}\,;$$

les triangles cuc'' et $c'vc''$ donnent de même :

$$cc'' = \sqrt{\rho^2 + \rho''^2 - \rho\rho''}, \quad \text{et} \quad c'c'' = \sqrt{\rho'^2 + \rho''^2 - \rho'\rho''}.$$

On déduit de là, par la formule connue,

$$\cos c'cc'' = \cos dcf = \frac{\rho^2 + (\rho - \rho')(\rho - \rho'')}{2\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - \rho\rho'}\,\sqrt{\rho^2 + \rho''^2 - \rho\rho''}}\,;$$

on trouvera de la même manière :

$$\cos cc'c'' = \cos gc'd = \frac{\rho'^2 + (\rho - \rho')(\rho'' - \rho')}{2\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - \rho\rho'}\,\sqrt{\rho'^2 + \rho''^2 - \rho'\rho''}}.$$

D'un autre côté, on a :

$$fd = \sqrt{\overline{fc}^2 + \overline{dc}^2 - 2\overline{dc}.\overline{fc}.\cos dcf},$$
$$gd = \sqrt{\overline{dc'}^2 + \overline{gc'}^2 - 2\overline{dc'}.\overline{gc'}.\cos dc'g},$$

formules où les droites dc, fc, dc', gc' restent encore à déterminer ; mais, dans le triangle csd, où wc' est, nous le savons, parallèle à sd, on a :

$$\frac{dc}{cs} = \frac{dc'}{sw} = \frac{cc'}{cw}\,;$$

d'où, en remplaçant cs, sw et cw par leurs valeurs ρ, ρ' et $\rho - \rho'$, ainsi que cc' par sa valeur trouvée plus haut, on obtient

$$dc = \frac{\rho}{\rho - \rho'}\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - \rho\rho'}, \quad \text{et} \quad dc' = \frac{\rho'}{\rho - \rho'}\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - \rho\rho'}\,;$$

les triangles cuf et $c''vg$ donneront de leur côté :

$$fc = \frac{\rho}{\rho - \rho''}\sqrt{\rho^2 + \rho''^2 - \rho\rho''}, \quad \text{et} \quad gc' = \frac{\rho'}{\rho'' - \rho'}\sqrt{\rho''^2 + \rho'^2 - \rho''\rho'}.$$

Il vient donc, après substitutions et réductions, et en faisant, pour abréger,

$$\sqrt{\rho^2\rho'^2 + \rho^2\rho''^2 + \rho'^2\rho''^2 - \rho^2\rho'\rho'' - \rho\rho'^2\rho'' - \rho\rho'\rho''^2} = \mathrm{P},$$

$$fd = \frac{\rho}{(\rho - \rho')(\rho - \rho'')} \cdot \mathrm{P},$$

$$gd = \frac{\rho'}{(\rho - \rho')(\rho'' - \rho')} \cdot \mathrm{P},$$

et conséquemment

$$fg = \frac{\rho''}{(\rho - \rho'')(\rho'' - \rho')} \cdot \mathrm{P}.$$

On tire de là :

$$\frac{fd}{gd} = \frac{\rho(\rho'' - \rho')}{\rho'(\rho - \rho'')}.$$

D'autre part, d'après le résultat du § 173, on a, en observant que *fo* et *go* sont respectivement égaux aux rayons *fu* et *gv* des deux cloisons que nous considérons,

$$fo = \frac{\rho\rho''}{\rho - \rho''}, \quad go = \frac{\rho''\rho'}{\rho'' - \rho'}, \quad \text{d'où} \quad \frac{fo}{go} = \frac{\rho(\rho'' - \rho')}{\rho'(\rho - \rho'')};$$

les deux rapports $\frac{fd}{gd}$ et $\frac{fo}{go}$ sont donc égaux, et, par conséquent, la droite *do* est la bissectrice de l'angle *fog*.

Connaissant, par ce qui précède, les trois côtés du triangle *fog*, on en déduit, toute réduction faite,

$$\cos fog = -\frac{1}{2},$$

d'où il résulte que l'angle *fog* est de 120°, et, par suite, que les angles *fod* et *god* sont chacun de 60°.

Cherchons enfin la longueur de la bissectrice *do*. Pour cela, remarquons que, dans tout triangle dont l'un des angles est de 120°, il y a une relation fort simple entre la bissectrice de cet angle et les deux côtés qui le comprennent. Soit, en effet (*fig.* 67), *abc* un triangle où

l'angle en a est de 120°; prolongeons le côté ba d'une quantité ad égale à ac, et joignons dc ; cette droite sera parallèle à la bissectrice ah, car l'angle dac sera de 60°, et puisque ad est égal à ac, le triangle dac sera équilatéral, et l'angle dca sera de 60° comme l'angle cah; on aura donc

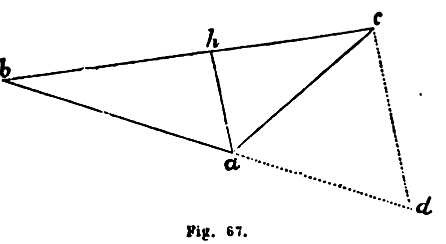


Fig. 67.

$$\frac{ah}{dc}=\frac{ba}{ba+ad},$$

ou, à cause de $dc=ad=ac$,

$$\frac{ah}{ac}=\frac{ba}{ba+ac},$$

et enfin

$$ah=\frac{ba\,.\,ac}{ba+ac}.$$

Ce résultat appliqué au triangle fog (*fig* 66), donne donc

$$do=\frac{fo\,.\,go}{fo+go},$$

et, après les substitutions,

$$do=\frac{\rho\rho'}{\rho-\rho'};$$

or c'est là précisément (§ 173) la valeur du rayon ds de la troisième cloison.

De tout cela il résulte donc, comme nous nous étions proposé de le démontrer, que les centres des trois cloisons sont en ligne droite, que les bases de ces trois cloisons aboutissent à un même point, enfin que les rayons de ces bases partant du point dont il s'agit font entre eux

des angles de 60°, et qu'ainsi ces mêmes bases se joignent sous des angles de 120°.

Maintenant, pour que nous puissions considérer les trois cloisons comme constituant réellement des portions de sphères, il reste encore à établir que ces trois portions se coupent suivant un arc unique, or c'est ce qui suit évidemment de ce que les centres *f, d, g* de ces trois sphères sont en ligne droite, et de ce que ces mêmes sphères ont un point commun en *o*.

Ainsi toutes les conditions théoriques sont satisfaites par trois cloisons de courbure sphérique disposées, avec les trois calottes, de manière à former un système ayant pour base celle que l'on trace par la construction du paragraphe précédent; on doit donc regarder comme extrêmement probable que le système prendra réellement cette forme.

§ 179. C'est, en effet, ce que j'ai vérifié par l'expérience, en employant le moyen décrit plus haut (§ 175), c'est-à-dire que l'on a tracé en traits larges sur un papier, par la méthode indiquée, la base d'un système de trois hémisphères avec leurs cloisons, puis que l'on a placé par-dessus la plaque de verre humectée de liquide glycérique, et enfin que l'on a déposé sur celle-ci, au-dessus des trois portions de circonférences, trois bulles d'abord un peu trop petites, qu'on a successivement augmentées par la petite manœuvre mentionnée, en faisant en même temps glisser, quand cela était nécessaire, la plaque de verre sur le papier. Or la base du système laminaire ainsi réalisé s'est encore superposée parfaitement au dessin.

Les constructions graphiques que j'ai données dans ce qui précède pour les bases des systèmes de calottes sphériques supposent implicitement la loi de la raison

inverse de la pression au diamètre; la coïncidence exacte des bases des systèmes réalisés avec les bases tracées fournit donc une vérification nouvelle de cette loi, à ajouter à la vérification directe obtenue dans le § 121. C'est aux expériences actuelles que j'ai fait allusion dans le paragraphe que je viens de citer. Ces mêmes expériences confirment également, du moins à l'égard des lames de courbure sphérique, l'indépendance entre la tension et la courbure (§ 159).

§ 180. Si l'on imagine qu'une quatrième calotte sphérique vienne s'accoler au système des trois précédentes, on pourra concevoir deux dispositions différentes de l'ensemble, à part, bien entendu, celle où la quatrième calotte se placerait de manière à ne s'unir qu'à une seule

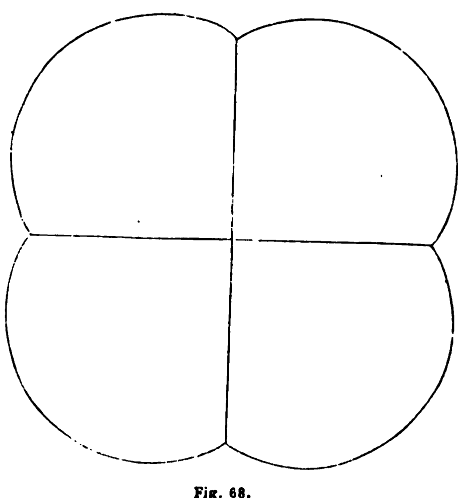


Fig. 68.

des autres. L'une de ces dispositions contiendrait quatre cloisons se joignant par une seule arête, et l'autre en contiendrait cinq se joignant par deux arêtes. Pour simplifier la question et les constructions graphiques, je

supposerai les quatre calottes égales en diamètre, auquel cas toutes les cloisons seront évidemment planes.

Alors, on peut admettre, en premier lieu, que les quatre calottes s'unissent de façon que leurs centres soient placés comme les quatre sommets d'un carré, ce qui donnera le système dont la base est représentée *fig.* 68, où il y a quatre cloisons aboutissant à une même arête sous des angles droits; ce système est évidemment un système d'équilibre, puisque tout y est symétrique.

On peut admettre, en second lieu, que, trois calottes s'étant d'abord unies, la quatrième s'unisse à deux d'entre elles; dans cet arrangement, les quatre centres seront aux sommets d'un losange, et l'on aura le système dont la base est représentée *fig.* 69, où il y a cinq cloisons.

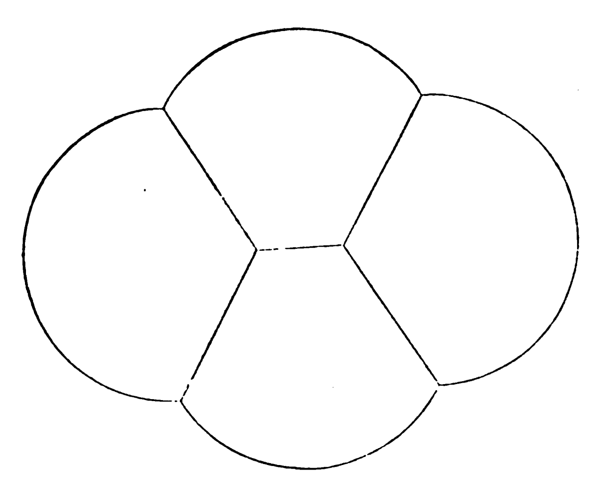


Fig. 69.

Ce système est évidemment aussi, à cause de sa symétrie, un système d'équilibre; mais ici, à une même arête liquide n'aboutissent plus que trois cloisons, faisant entre elles des angles de 120°.

Or si l'on essaie de réaliser sur la plaque de verre le premier de ces deux systèmes, on n'y parvient pas, ou, s'il se produit, ce n'est que pendant un instant inappréciable, et pour passer rapidement au second. Quant à ce dernier, on l'obtient directement sans aucune difficulté, et il persiste.

On doit conclure de là que, dans le premier système, l'équilibre est instable, et ainsi il devient probable que quatre cloisons aboutissant à une même arête ne peuvent coexister.

Remarquons d'ailleurs que, dans l'assemblage laminaire de la *fig.* 61, l'arête liquide semi-circulaire qui unit les deux calottes sphériques n'est commune qu'à trois lames, savoir à ces deux calottes et à la cloison, et, nous le savons, ces trois lames font entre elles des angles égaux; de même dans l'assemblage de la *fig.* 66, chacune des arêtes liquides qui unissent deux à deux les calottes n'est, comme celle qui unit les trois cloisons, commune qu'à trois lames faisant entre elles des angles égaux; enfin c'est ce qui a encore lieu évidemment dans l'assemblage de la *fig.* 69.

§ 181. Remarquons, d'autre part, que, dans les systèmes des *fig.* 66 et 69, il y a quatre arêtes aboutissant à un même point, savoir les trois qui unissent les calottes deux à deux, et celle qui unit les trois cloisons; or, de l'égalité des angles que forment entre elles les trois lames unies par une même arête, on déduit sans peine que les quatre arêtes qui aboutissent à un même point font aussi entre elles, en ce point, des angles égaux. En effet, en supposant d'abord les lames planes et, par suite, les arêtes rectilignes, le système constitue évidemment l'ensemble de quatre angles trièdres dans chacun desquels les trois angles dièdres sont égaux; or, en vertu

d'un théorème connu, cette égalité entraîne, pour l'un quelconque de ces angles trièdres, celle des angles plans; mais, chacun de ces derniers étant commun à deux des angles trièdres, il s'ensuit que, dans le système, tous les angles plans, c'est-à-dire les angles que font entre elles les quatre arêtes, sont égaux. Dans nos systèmes de calottes et de cloisons, les lames, ou au moins une partie d'entre elles, sont courbes, et conséquemment il en est de même des arêtes; mais on peut évidemment, au point commun à celles-ci, remplacer les lames courbes par leurs plans tangents, et les arêtes courbes par leurs tangentes qui seront les intersections de ces plans.

Réciproquement, si les quatre arêtes font entre elles, au point qui leur est commun, des angles égaux, il résulte de la symétrie de l'ensemble que les lames doivent aussi faire entre elles, à leurs arêtes communes, des angles égaux. Ainsi, dans tous les cas, l'égalité des angles sous lesquels quatre arêtes aboutissent à un point commun et l'égalité des angles sous lesquels trois lames s'unissent à une même arête sont, du moins au voisinage immédiat du point dont il s'agit, des conséquences nécessaires l'une de l'autre.

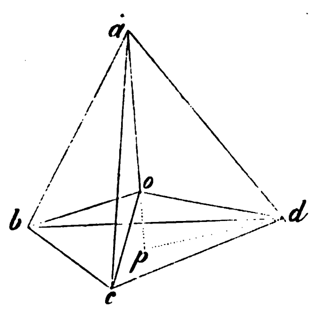


Fig. 70.

Cherchons actuellement la valeur commune des angles entre les arêtes. D'après ce que nous venons de dire, il suffit de se figurer quatre droites aboutissant à un même point sous des angles égaux. Cela étant, pour suivre la voie la plus simple, considérons un tétraèdre régulier

abcd (*fig.* 70). Soit *o* le centre de ce tétraèdre. Menons les droites *oa*, *ob*, *oc*, *od* aux quatre sommets : ces droites feront évidemment entre elles des angles égaux, dont la valeur sera, par conséquent, celle qu'il s'agit d'obtenir. Cela posé, prolongeons la droite *ao* jusqu'en *p*, où elle atteint la base, et joignons *pd* ; le triangle *opd* sera rectangle en *p*. Maintenant remarquons que le point *o* est le centre de gravité du tétraèdre, et que le point *p* est le centre de gravité de la base *bcd* ; or on sait que si, dans une pyramide quelconque, on joint le sommet au centre de gravité de la base, le centre de gravité de la pyramide est situé sur cette droite, aux trois quarts de sa longueur à partir du sommet ; *op* est donc le tiers de *oa*, et comme le point *o* est à égale distance des quatre sommets, *op* est également le tiers de *od*. Dans le triangle rectangle *opd*, on a conséquemment $\cos dop = \frac{1}{3}$; d'où résulte enfin

$$\cos doa = -\frac{1}{3}.$$

Ainsi lorsque quatre droites aboutissent à un même point sous des angles égaux, chacun de ces angles est celui qui a pour cosinus $-\frac{1}{3}$; on trouve, d'après cela, que cet angle est de 109° 28′ 16″, c'est-à-dire à fort peu près de 109 degrés et demi.

Telle est donc la valeur des angles sous lesquels, dans les assemblages laminaires que nous avons étudiés jusqu'ici, les arêtes liquides aboutissent à un même point.

§ 182. Ces systèmes étaient simplement ceux qui résultent de l'accolement des calottes sphériques entre elles ; mais on peut en produire de bien plus curieux :

nous avons vu, dans les chapitres III et IV, avec quelle facilité on développe des lames de liquide glycérique s'appuyant sur des contours en fil de fer; si donc nous prenons l'une quelconque des charpentes polyédriques qui nous ont servi à la réalisation des polyèdres d'huile (§ 29), qu'elle soit légèrement oxydée, que nous la plongions dans le liquide glycérique, et qu'après l'y avoir laissée pendant quelques secondes pour la bien mouiller, nous l'en retirions, nous devrons la trouver, et nous la trouverons, en effet, occupée par un système de lames; or ce système, qu'on s'attendrait à voir constitué irrégulièrement suivant le hasard des mouvements qu'on a imprimés à la charpente en la sortant du liquide, présente, au contraire, toujours une disposition parfaitement régulière et symétrique. Cette disposition varie avec la forme de la charpente; mais, en général, elle se reproduit constamment la même dans la charpente d'un même polyèdre.

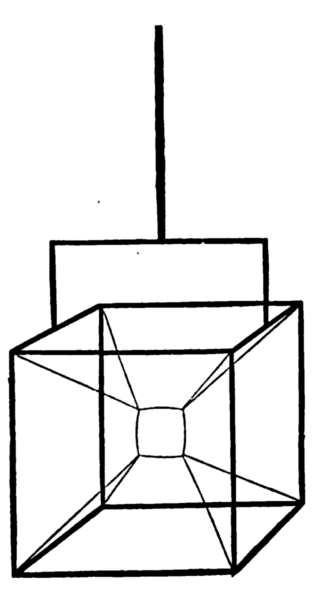


Fig. 71.

Par exemple, la charpente cubique donne invariablement le système que je représente ici (*fig.* 71) : il se compose, on le voit, de douze lames partant respectivement des douze arêtes solides et aboutissant toutes à une lamelle unique quadrangulaire placée au milieu de l'ensemble. Les côtés de cette lamelle sont légèrement courbes ainsi que toutes les autres arêtes liquides, et conséquemment toutes les lames, à l'exception de la

lamelle centrale, ont de faibles courbures. Les courbures des arêtes liquides qui partent des sommets de la charpente sont trop peu prononcées pour qu'on ait pu les indiquer dans le dessin. Quand on effectue l'expérience, il faut avoir soin de ne pas plonger dans le liquide la totalité de la fourche qui soutient la charpente, car, si on le faisait, il se développerait aussi une lame dans cette fourche, lame qui modifierait le système des autres. Je rappellerai que ma charpente cubique a 7 centimètres de côté.

§ 183. Les systèmes laminaires ainsi développés dans les charpentes, ont excité l'admiration de toutes les personnes à qui je les ai fait voir : ils sont, comme je l'ai dit, d'une régularité parfaite, leurs arêtes liquides ont une finesse extrême, et leurs lames étalent après quelque temps les plus riches couleurs.

Pour observer commodément, et sans lui communiquer d'agitation, l'un quelconque d'entre eux, on pose la charpente qui le contient sur un petit bâti en fil de fer semblable à celui qui est représenté en perspective dans la *fig.* 72; les bâtis dont je me sers ont quatre centimètres de largeur, douze de longueur et deux et demi de hauteur.

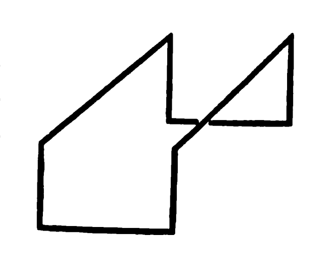


Fig. 72.

Après chaque série d'expériences, on lave les charpentes en les passant dans de l'eau de pluie, puis on les dépose sur du papier à filtre, et on les laisse sécher.

Disons ici que, pour la réalisation de ces systèmes laminaires, on peut, à la rigueur, remplacer le liquide glycérique par une simple solution de savon. On aura alors des figures très-peu durables, mais on sera toujours

maître de replonger la charpente aussi souvent qu'on le voudra, et de renouveler ainsi l'observation.

§ 184. Maintenant, quel que soit le polyèdre dont les arêtes forment la charpente qu'on emploie, si l'on examine attentivement le système laminaire produit, on reconnaîtra que toujours à une même arête liquide aboutissent trois lames, et que les arêtes liquides aboutissant à un même point liquide sont toujours au nombre de quatre; ainsi ces nombres, que nous avions déjà constatés dans les systèmes de calottes, se retrouvent dans tous les systèmes laminaires, de sorte que leur invariabilité constitue deux lois. En outre, ici, comme à l'égard des calottes, il résulte de l'égalité des tensions que les trois lames unies par une arête liquide font nécessairement entre elles, à cette arête, des angles égaux, et que, par suite, les quatre arêtes concourant en un même point liquide font aussi entre elles, à ce point, des angles égaux, ce qui constitue deux autres lois générales.

§ 185. Parmi les charpentes que j'ai soumises à l'expérience, trois, savoir celles du tétraèdre régulier, du prisme triangulaire droit équilatéral, et de l'octaèdre régulier, fournissent des systèmes composés de lames planes ; or ceux-ci permettent de constater l'égalité des angles entre les arêtes liquides, car on peut leur appliquer des mesures; ils permettent conséquemment aussi de vérifier l'égalité des angles entre les lames.

Je reproduis ici (*fig.* 73, 74 et 75) les dessins de ces trois systèmes; on ne doit pas oublier, pour l'intelligence de ces dessins et de la plupart de ceux qui suivront, que de chacune des arêtes solides part une lame se dirigeant vers l'intérieur de la charpente, et rattachée aux autres lames par les arêtes liquides, que les dessins

figurent en traits fins. Le système du tétraèdre, on le voit, est simplement formé de six lames qui se joignent suivant quatre arêtes liquides aboutissant toutes au centre de la figure ; celui du prisme triangulaire présente deux

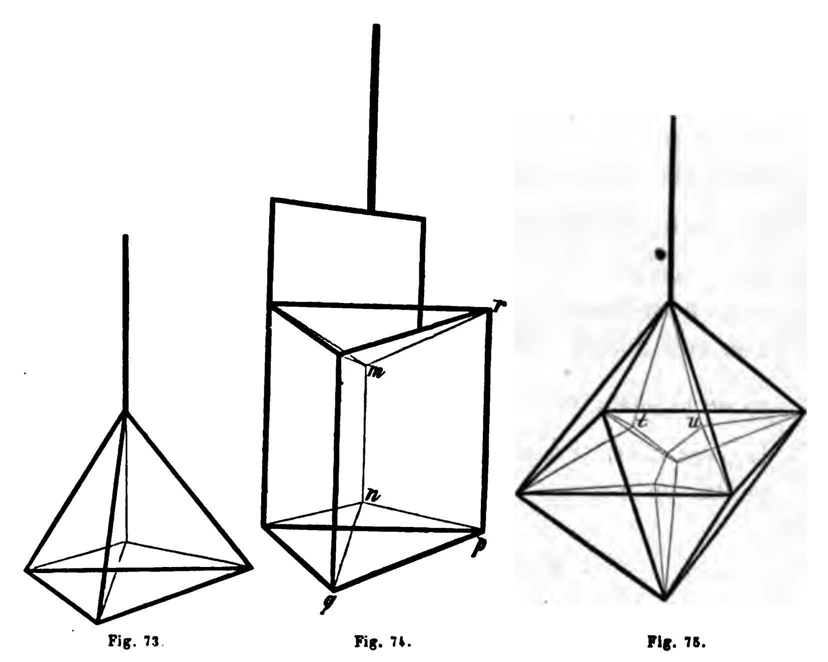


Fig. 73. Fig. 74. Fig. 75.

pyramides s'appuyant sur les bases de la charpente et dont les sommets *m* et *n* sont aux extrémités d'une arête liquide parallèle aux côtés du prisme ; enfin celui de l'octaèdre, l'un des plus beaux qu'on puisse obtenir, contient, outre les douze lames partant des arêtes solides, six quadrilatères allongés dans le sens d'un de leurs angles, ayant chacun le sommet de cet angle à l'un de ceux de la charpente, et le sommet opposé au centre de la figure ; ces quadrilatères sont disposés de manière que, dans chaque couple aboutissant à deux sommets opposés de la charpente, leurs plans sont à angle droit

l'un sur l'autre. Avertissons ici que, dans la charpente octaédrique, d'autres systèmes peuvent se former; nous en parlerons plus loin.

Dans le système du tétraèdre (*fig.* 73), l'égalité des angles est évidente, tout étant parfaitement symétrique dans tous les sens; on voit d'ailleurs que les quatre arêtes liquides occupent précisément les positions des droites *oa*, *ob*, *oc*, *od* de la fig. 70. Dans celui du prisme triangulaire (*fig.* 74), l'angle entre l'arête verticale *mn* et l'arête oblique *np*, par exemple, devant avoir $-\frac{1}{3}$ pour cosinus, il s'ensuit que la hauteur verticale du point *n* au-dessus du plan de la base est le tiers de *np*; d'où l'on déduit aisément qu'en désignant par *a* l'arête *pq* de la base, cette hauteur verticale est égale à $\frac{a}{2\sqrt{6}}$. D'après cela, si *b* désigne l'arête latérale *pr* de la charpente, on a

$$mn = b - \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Dans la charpente que j'ai employée, l'arête *b* était de $70^{mm},70$, et l'arête *a* de $69^{mm},23$ (1); en substituant

(1) Il est nécessaire d'expliquer ici de quelle manière ces évaluations ont été obtenues. Une charpente en fil de fer ne pouvant être géométriquement parfaite, on a mesuré séparément chacune des arêtes latérales, et l'on a pris la moyenne des résultats, puis on a agi de même à l'égard des arêtes des bases; mais ces mesures n'ont pas été effectuées directement sur les arêtes, parce que les terminaisons de celles-ci étaient plus ou moins masquées par les soudures; voici comment on a procédé : la charpente étant placée verticalement, et l'une de ses faces latérales en regard du cathétomètre, on a déterminé, en visant aussi près de l'arête verticale de droite que le permettaient les soudures, la distance comprise entre les deux arêtes horizontales. puis on a fait la même chose près de l'arête verticale de gauche; ensuite on a tourné le prisme sur son axe de façon à présenter successivement au cathétomètre les deux autres faces latérales, et l'on a répété sur chacune d'elles les mêmes opérations; on a eu ainsi, pour la longueur des arêtes

ces nombres dans la formule ci-dessus, on trouve $mn = 42^{mm},44$; or la mesure au cathétomètre a donné $mn = 42^{mm},37$, valeur qui ne diffère de la précédente que de $0^{mm},07$, c'est-à-dire de moins que les deux millièmes de l'une ou de l'autre.

Quant au système de l'octaèdre (*fig.* 75), il présente, dans chacun des quadrilatères dont j'ai parlé, une dimension facile à mesurer au cathétomètre : c'est la distance comprise entre les sommets t et u des deux angles obtus opposés. D'un autre côté, en partant du principe que ces deux angles ainsi que celui dont le sommet est au centre de la figure, doivent avoir $-\frac{1}{3}$ pour cosinus, on arrive aisément à démontrer que cette distance tu

latérales, six valeurs peu différentes, dont la moyenne s'est trouvée de $69^{mm},83$.

Cela fait, on a disposé la charpente horizontalement sur des supports convenables de telle manière que, l'une de ses faces latérales regardant encore le cathétomètre, les deux arêtes des bases qui la limitaient à droite et à gauche fussent verticales, et l'on a opéré à l'égard de celles-ci comme à l'égard des précédentes, puis, tournant le prisme sur son axe, on a passé de même aux deux autres faces, de sorte qu'on a eu aussi, pour les arêtes des bases, six valeurs, dont la moyenne était $68^{mm},36$.

Mais ces deux moyennes devaient subir une petite correction ; en effet, les lames liquides n'aboutissent point aux fils solides suivant les génératrices de ceux-ci dont on a mesuré les distances, mais suivant d'autres génératrices situées plus en dedans de la charpente, d'où il suit que les deux nombres ci-dessus sont un peu trop petits. Pour arriver à la correction d'une manière simple, remarquons qu'en vertu de la tension, le plan de chacune de nos lames doit passer par l'axe du fil solide cylindrique sur lequel la lame s'appuie, et que, par conséquent, les arêtes liquides prolongées iront aboutir aux points où ces axes se coupent ; nous pouvons donc, sans altérer en aucune manière le système laminaire et, par suite, la longueur de l'arête liquide mn, substituer, par la pensée, à notre charpente, l'ensemble des axes des fils solides qui la composent, ce qui revient évidemment à ajouter à chacun de nos deux nombres le diamètre de ces fils ; or ce diamètre, déterminé encore au moyen du cathétomètre, a été trouvé, comme moyenne de dix mesures prises sur les différents fils, égal à $0^{mm},87$; c'est par l'addition de cette quantité à nos deux nombres, que l'on a obtenu enfin les valeurs de b et de a données dans le texte.

doit être exactement le tiers de la longueur des arêtes de l'octaèdre. Pour le faire voir, soit *stou* (*fig.* 76) l'un des quadrilatères; menons les deux diagonales *tu* et *os*, qui se couperont à angle droit en *m*; désignons par *d* la distance *tu*, par α la valeur commune des trois angles obtus, et par *a* la longueur de l'arête de l'octaèdre. Dans le triangle *ots*, l'angle en *t* étant α, et l'angle en *o* étant $\frac{1}{2}\alpha$, l'angle en *s* sera $180^\circ - \frac{3}{2}\alpha$; d'après cela, les deux triangles rectangles *omt* et *smt*

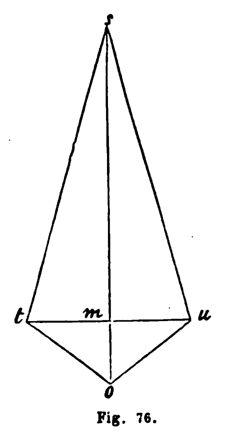


Fig. 76.

donneront $om = \dfrac{\frac{1}{2}d}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha}$, et $ms = \dfrac{\frac{1}{2}d}{\operatorname{tang}(180^\circ - \frac{3}{2}\alpha)}$.

Remarquons maintenant que la diagonale *os*, ou la somme des deux longueurs *om* et *ms*, est la demi-hauteur de l'octaèdre, et conséquemment, comme on le verra sans peine, est égale à $\frac{a}{\sqrt{2}}$; on aura donc $\frac{1}{2}d\left\{\dfrac{1}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha} + \dfrac{1}{\operatorname{tang}(180^\circ - \frac{3}{2}\alpha)}\right\} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Mais, sachant que le cosinus de l'angle α est $-\frac{1}{3}$, on trouvera $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{2}$, et $\operatorname{tang}\left(180^\circ - \frac{3}{2}\alpha\right) = \frac{1}{5}\sqrt{2}$. Ces valeurs étant substituées dans la formule ci-dessus, on obtient, comme je l'ai avancé,

$$d = \frac{a}{3}.$$

Dans ma charpente, les mesures ont donné(1) pour *a* la valeur 69mm,49, dont le tiers est 23mm,16 ; et pour la distance *d*, la valeur 23mm,14. La différence 0mm,02 entre la valeur calculée et la valeur mesurée est, on le voit, plus insignifiante encore que dans le cas précédent.

§ 186. Les systèmes laminaires des autres charpentes, c'est-à-dire ceux qui contiennent des lames courbes et conséquemment des arêtes liquides courbes, vérifient encore, et d'une manière bien curieuse, quoiqu'un peu moins précise, l'égalité des angles sous lesquels ces arêtes aboutissent à un même point liquide ; ils vérifient ainsi également, du moins dans le voisinage immédiat de celui-ci (§ 181), l'égalité des angles entre les trois lames qui se joignent suivant chacune de ces mêmes arêtes.

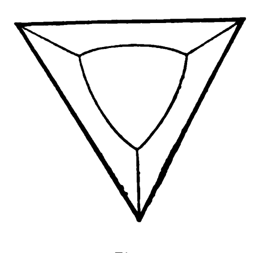
Prenons comme premier exemple le système laminaire de la charpente cubique, système dont la *fig.* 71 reproduit le dessin. Chacun des angles de la lamelle quadrangulaire centrale devant être de 109 degrés et demi, et conséquemment supérieur à un droit, il en résulte que les côtés de cette lamelle ne peuvent être rectilignes et

(1) Une charpente octaédrique régulière pouvant être considérée comme formée de l'ensemble de trois carrés en fils de fer dont les plans se coupent suivant les diagonales, la charpente a été placée de manière que ces carrés se présentassent l'un après l'autre en face du cathétomètre avec deux de leurs côtés dirigés verticalement, et, dans les trois positions de la charpente, on a mesuré, aussi près que possible de chacun de ces fils verticaux, la distance comprise entre les deux fils horizontaux. On a obtenu ainsi douze valeurs, dont la moyenne était 68mm,59; on a pris, en outre, sur les différents fils, huit mesures du diamètre de ceux-ci, mesures qui ont donné pour moyenne 0mm,90. D'après les considérations exposées dans la note précédente, on a ajouté ce diamètre au nombre ci-dessus, et c'est ainsi qu'on a trouvé la valeur de *a* indiquée dans le texte.

Quant à la valeur de *d*, comme les petites irrégularités de la charpente devaient introduire de légères différences entre les six quadrilatères, on a mesuré cette distance dans chacun d'eux, et la valeur de *d* donnée dans le texte est la moyenne de ces six mesures.

doivent constituer des arcs légèrement convexes vers l'extérieur ; or c'est, en effet, ce que montre le système réalisé.

J'ai représenté dans la *fig.* 74 le système laminaire du prisme triangulaire équilatéral, et j'ai dit qu'en désignant par a la longueur des arêtes des bases, la hauteur de chacune des pyramides laminaires qui s'appuient sur ces bases est égale à $\frac{a}{2\sqrt{6}}$; mais on comprend que si la hauteur du prisme est moindre que le double de cette quantité, ou, en d'autres termes, moindre que les 0,4 des côtés des bases, le système en question ne saurait se produire. Dans ce cas, l'analogie avec d'autres systèmes dont je parlerai ci-après m'avait conduit à prévoir que le système se composerait d'une lame triangulaire équilatérale parallèle aux bases, placée à égales distances de ces dernières, et rattachée par d'autres lames à toutes les arêtes solides ; mais comme les angles de ce triangle laminaire devaient être de 109 degrés et demi, et que les angles d'un triangle équilatéral à côtés rectilignes ne sont que de 60°, il fallait nécessairement que les côtés de notre triangle laminaire fussent convexes vers l'extérieur, comme ceux de la lamelle du système du cube, mais que leurs courbures fussent beaucoup plus prononcées ; or c'est ce que l'expérience a pleinement vérifié ; seulement les courbures ne se sont montrées très-fortes que dans le voisinage des sommets. La hauteur de ma charpente était environ le tiers de la longueur des côtés des bases ; la *fig.* 77 représente le système vu par-dessus ; ce système constitue donc un second exemple à l'appui de la proposition dont il s'agit.


Fig. 77.

En troisième lieu, si l'on prend pour charpente celle d'un prisme pentagonal régulier dont la hauteur ne soit pas trop grande relativement aux dimensions des bases, le système laminaire présente, au milieu de sa hauteur, une lame pentagonale parallèle aux bases, et à laquelle viennent se rattacher, comme à la lame triangulaire du système précédent, toutes les lames partant des arêtes solides ; or l'angle de deux côtés contigus d'un pentagone régulier étant de 108°, c'est-à-dire très-voisin de notre angle de $109°\frac{1}{2}$, il s'ensuit que les côtés de la lame pentagonale doivent être sensiblement droits, et c'est encore ce que l'expérience confirme : dans la charpente que j'ai employée, la longueur des arêtes des bases est de 5 centimètres, et la hauteur du prisme de 6 centimètres ; les côtés de la lame pentagonale ont environ 2 centimètres, et l'œil ne peut y distinguer aucune courbure. Dans ce système, les lames qui partent des arêtes solides des bases et vont se rattacher aux côtés du pentagone central, paraissent planes, et cela doit être, puisqu'elles s'appuient d'une part sur les arêtes rectilignes des bases et d'autre part sur les côtés sensiblement droits de la lame centrale ; il suit de là que les arêtes liquides obliques qui vont des sommets des bases à ceux du pentagone central, semblent droites. Quant aux lames triangulaires qui partent des arêtes verticales solides, elles sont rigou-

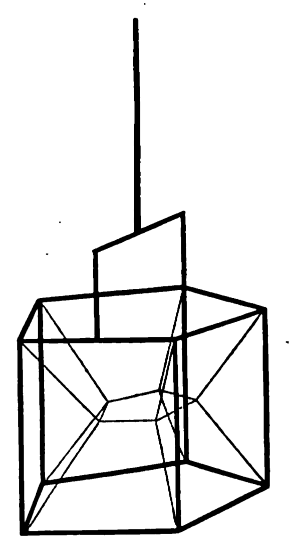


Fig. 78.

reusement planes par suite de la symétrie de leur position. Le système dont il s'agit est représenté *fig.* 78.

En quatrième lieu enfin, si la charpente est celle d'un prisme hexagonal régulier, le système laminaire est analogue au précédent dans sa disposition générale, la lame centrale étant, bien entendu, hexagonale ; mais comme l'angle de deux côtés contigus d'un hexagone régulier est de 120°, c'est-à-dire notablement supérieur à notre angle de $109°\frac{1}{2}$, les côtés de la lame en question doivent être sensiblement courbés vers l'intérieur, et c'est également ce que montre le système réalisé. La hauteur de la charpente que j'ai employée est à la distance de deux côtés opposés de la base, ou, en d'autres termes, au diamètre du cercle que l'on inscrirait à cette base, comme 7 à 6.

§ 186bis. Du reste, on peut former un système à arêtes liquides courbes, dans lequel l'angle entre ces arêtes est susceptible d'une vérification directe et précise : dans un grand anneau en fil de fer muni de trois pieds, on réalise une lame plane de liquide glycérique, puis on dépose sur cette lame, et l'une près de l'autre, deux petites bulles du même liquide sensiblement égales en diamètre. Chacune d'elles tend à se transformer en une lentille laminaire bi-convexe, enchâssée par son bord dans la lame plane ; mais, à cause de leur contact, ces deux lentilles

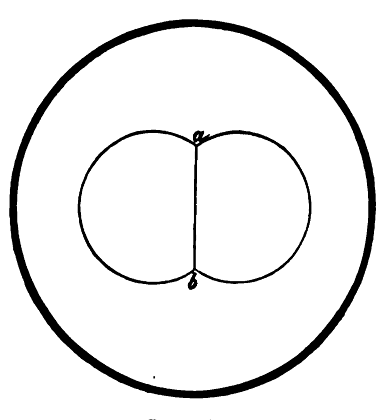


Fig. 78 bis.

s'accolent avec une cloison. A moins d'un hasard particulier, elles ne seront pas tout à fait de même diamètre, mais on fera disparaître la différence en aspirant une petite portion de l'air contenu dans la plus grande, au moyen d'un tube effilé dont la pointe a été préalablement mouillée de liquide glycérique (note du § 175); alors la cloison est plane, et le système, vu par-dessus, présente l'aspect de la *fig.* 78bis; *ab* est la projection de la cloison.

L'anneau dont j'ai fait usage a un diamètre de 20 centimètres; il est formé d'un fil de fer de 3 millimètres d'épaisseur, et les pieds ont 8 centimètres de hauteur. Pour effectuer la vérification expérimentale annoncée, on a tracé sur un papier, en partant de la valeur théorique de l'angle en *a*, la projection du système, ce qui est fort simple : l'angle des deux tangentes en *a* doit avoir, nous le savons, pour cosinus $-\frac{1}{3}$, et celui des deux rayons qui joindraient le point *a* aux centres des deux lentilles, en est le supplément; on a construit ce dernier angle, et l'on a porté, à partir de *a*, sur chacun de ses côtés, une longueur de 4 centimètres; puis, prenant comme centres les deux points ainsi déterminés, on a tracé deux portions de circonférences se terminant aux points *a* et *b*; enfin on a mené la droite *ab*.

On conçoit que si, après avoir réalisé dans l'anneau un système un peu plus petit que ce dessin, on pose ce même dessin entre les pieds de l'anneau, et que, fermant un œil, on tienne l'autre à une hauteur convenable au-dessus de l'ensemble, on pourra s'assurer s'il est possible d'amener l'assemblage des lentilles à se projeter exactement sur le tracé. Cependant l'expérience faite de cette manière offrirait de la difficulté, parce que

l'assemblage des lentilles, obéissant aux petites agitations de l'air ambiant, change incessamment de place. Pour écarter cet inconvénient, on a tendu préalablement, en travers de l'anneau suivant un diamètre, un fil fin, lequel, après la réalisation de la lame plane, se trouvait nécessairement engagé dans celle-ci, et l'on a déposé les deux bulles de telle façon que le fil fût engagé aussi dans la cloison ; le système perd ainsi sa mobilité.

Pour procéder à l'expérience, on a recouvert le dessin d'une plaque de verre mince afin de le maintenir, puis, après avoir développé la lame plane, on a posé l'anneau par ses pieds sur cette plaque, et l'on a fait en sorte que, pour l'œil placé bien au-dessus, le fil se projetât sur la droite *ab* du dessin, droite qu'on avait d'ailleurs prolongée des deux côtés ; on a déposé ensuite les deux bulles, et l'on a égalisé avec grand soin les deux lentilles. Alors l'œil convenablement placé voyait effectivement le contour de l'assemblage des lentilles réelles se projeter exactement sur le contour dessiné.

§ 187. — Le fait dont j'ai parlé (§ 180) pour montrer qu'un système dans lequel plus de trois lames aboutissent sous des angles égaux à une même arête liquide est à l'état d'équilibre instable, se rapporte à un système qui offrirait en même temps plus de quatre arêtes aboutissant à un même point liquide. L'instabilité pourrait donc être attribuée également à cette dernière circonstance, et il faut décider si elle appartient exclusivement à l'une ou à l'autre, ou seulement à leur réunion.

Pour cela, revenons à l'expérience rapportée dans le § 139, c'est-à-dire prenons comme système solide l'ensemble de deux rectangles qui se coupent à angle droit au milieu de deux de leurs côtés opposés ; seulement, pour rendre l'effet plus apparent et la charpente plus

commode à manier, donnons aux deux rectangles moins de largeur et plus de hauteur (*fig.* 79).

Le système laminaire le plus simple que l'on puisse concevoir dans cette charpente, se composerait de quatre lames planes occupant respectivement les quatre moitiés des rectangles et aboutissant à une arête rectiligne unique *ab* (*fig.* 80), qui joindrait les deux points d'inter-

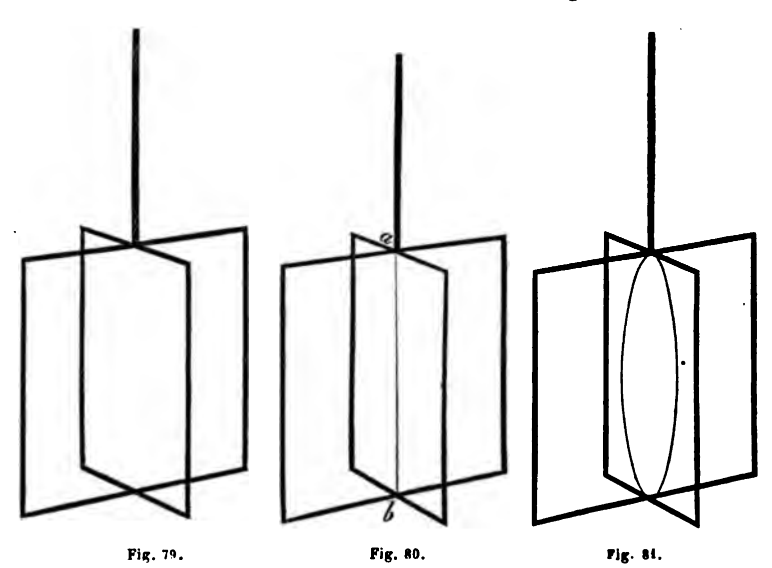


Fig. 79. Fig. 80. Fig. 81.

section de ces mêmes rectangles. Ce système, à cause de sa symétrie, serait évidemment un système d'équilibre, et il ne présenterait aucun point liquide commun à plusieurs arêtes ; mais l'arête *ab* serait commune à quatre lames. Or, quand on retire cette charpente du liquide glycérique, on ne la trouve jamais occupée par le système que je viens d'indiquer : dans celui qui se réalise, au lieu de l'arête *ab*, il y a toujours, comme avec la charpente du § 139, une lame plane (*fig.* 81) terminée par deux arêtes courbes auxquelles viennent se rattacher les lames courbes partant des arêtes solides. Ici, on le voit, chacune

des deux arêtes liquides n'est commune qu'à trois lames, et il faut conclure de là que l'instabilité est bien réellement une propriété des systèmes laminaires dans lesquels cette condition ne serait pas remplie.

Ajoutons que Brewster, qui a pris plaisir à reproduire et à varier mes systèmes laminaires, a imaginé [1] une modification fort curieuse de l'expérience ci-dessus : il a rendu les deux rectangles mobiles autour de leurs points d'intersection, de manière à faire varier les angles dièdres, et alors, en augmentant graduellement ceux de ces angles dont le plan de la lame ovale est bissecteur, il a vu cette lame se rétrécir au fur et à mesure, de telle façon que, lorsque les angles dont il s'agit sont devenus de 135°, la lame ovale s'est réduite à une simple arête liquide droite joignant les deux points d'intersection; mais, au moment même, le système s'est modifié, et une nouvelle lame ovale s'est produite, bissectrice des deux autres angles dièdres. Brewster a donc réussi à réaliser, mais seulement pour un instant inappréciable, un système dans lequel quatre lames sont unies par une même arête liquide, et cette jolie expérience complète la vérification de l'instabilité d'un semblable système.

Quant à la seconde circonstance, je ferai d'abord remarquer que si, dans la charpente cubique, on conçoit un système formé de douze lames planes triangulaires partant respectivement des douze arêtes solides et aboutissant au centre de la charpente (*fig* 82), ce système, à cause de sa parfaite symétrie, sera nécessairement un système d'équilibre, et l'on voit sans peine qu'à chaque arête liquide n'aboutiront que trois lames qui, de plus, feront entre elles des angles égaux; mais il y aura huit

(1) *On the figures of equilibrium in liquid films* (TRANSACT. OF THE ROYAL SOCIETY OF EDINBURGH, vol. XXIV, 1867).

arêtes liquides aboutissant au point central. Or nous savons qu'avec le liquide glycérique, ce système ne se produit pas, et qu'on obtient toujours celui de la *fig.* 71, dans lequel à chacun des sommets de la lamelle quadrangulaire centrale n'aboutissent que quatre arêtes liquides. Il est permis de conclure de ce fait que l'instabilité appartient aussi à tout système dans lequel un même point liquide est commun à plus de quatre arêtes.

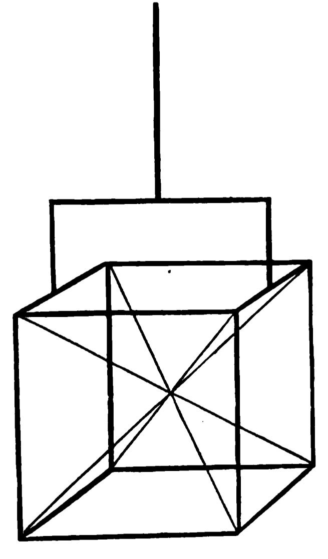


Fig. 82.

On peut obtenir d'une manière permanente le système de la *fig.* 82; mais c'est, comme dans le cas d'instabilité du § 138, en introduisant dans ce système une partie solide; il suffit, en effet, de tendre, d'un sommet de la charpente au sommet opposé, un fil de fer très-fin. Cependant, quand on retire du liquide glycérique la charpente ainsi disposée, le système qui l'occupe n'est pas immédiatement celui dont il s'agit; il contient encore une lamelle quadrangulaire; seulement celle-ci est beaucoup plus petite que celle de la *fig.* 71, et n'est point placée symétriquement par rapport à la charpente : elle s'appuie par l'un de ses sommets sur le milieu de la diagonale solide; mais on la voit bientôt diminuer spontanément d'étendue, jusqu'à s'annuler complétement, de sorte que le système devient alors celui de la *fig.* 82. Les choses se bornent là, et le système demeure parfaitement stable en cet état, quand le décroissement de la lamelle s'est effectué avec assez de

lenteur; mais souvent ce décroissement est plus rapide, et alors se produit un autre phénomène singulier : à l'instant où la lamelle s'annule, on voit s'en reformer une autre beaucoup plus petite encore, située du côté opposé de la diagonale solide, ayant son plan perpendiculaire à celui de la première, et s'appuyant, non plus par un sommet, mais par le milieu de l'un de ses côtés, sur le milieu de la diagonale solide (1); puis cette seconde lamelle décroît et s'annule comme la précédente; dans ce cas donc, le système n'atteint sa forme définitive que par une espèce d'oscillation.

§ 188. On doit, je pense, regarder maintenant comme bien établies pour tous les assemblages laminaires, les lois que je viens de discuter. Or ces lois nous conduisent à une conséquence fort remarquable : la mousse qui se forme sur certains liquides, par exemple sur le vin de Champagne, sur la bière, sur l'eau de savon que l'on agite, est évidemment un assemblage laminaire, composé d'une foule de lamelles ou cloisons qui s'entrecoupent et emprisonnent entre elles de petites portions de gaz; conséquemment, bien que tout y semble régi par le hasard, elle doit être soumise à ces mêmes lois ; ainsi ses innombrables cloisons se joignent nécessairement partout trois à trois sous des angles égaux, et toutes ses arêtes se distribuent de manière qu'il y en ait toujours quatre aboutissant à un même point, en y faisant des angles égaux.

J'ai vérifié ces faits par l'expérience suivante : on a plongé au fond d'un vase contenant du liquide glycérique

(1) Ma charpente ayant été accidentellement déformée, puis réparée, la seconde lamelle, quand elle se produisait, ne se plaçait plus tout à fait de la manière indiquée ci-dessus; la différence provenait sans doute d'une petite irrégularité existant dans la charpente, soit avant, soit après la réparation de celle-ci.

la tête d'une pipe tenue un peu obliquement, et l'on a soufflé d'une manière continue par le tuyau, de façon à produire une série nombreuse de bulles d'air assez grosses qui traversaient le liquide. On a déterminé ainsi, comme le font les enfants avec de l'eau de savon, la formation d'un édifice cloisonné s'élevant au-dessus des bords du vase, édifice évidemment de la même constitution que la mousse, mais dont les différentes parties ont des dimensions beaucoup plus grandes; or, aussi loin que l'œil pouvait plonger dans ce système sans s'égarer, on a reconnu que partout une même arête n'était commune qu'à trois cloisons, et qu'il n'y avait jamais que quatre arêtes aboutissant à un même point. Quant à l'égalité des angles entre ces arêtes, il y avait certains endroits où trois de celles qui aboutissaient à un point semblaient être à peu près dans un même plan ; mais, en regardant avec attention, on constatait que ces arêtes s'infléchissaient fortement en approchant de leur point de concours.

On s'explique d'ailleurs aisément la génération d'un semblable édifice, et conséquemment celle de la mousse : les premières bulles de gaz qui arrivent à la surface du liquide, donnent naissance à des calottes sphériques qui s'accolent comme celles dont nous nous sommes occupés précédemment, et bientôt toute la surface du liquide en est couverte ; alors les lames que produisent les bulles gazeuses subséquentes soulèvent nécessairement ce premier assemblage, en déterminant la formation de cloisons inférieures, de manière qu'il y a, en peu de temps, deux systèmes de lames superposés, puis, les bulles gazeuses arrivant toujours, cet ensemble est soulevé à son tour, et ainsi de suite, le tout se disposant avec plus ou moins de symétrie, suivant les différences de volume des bulles

gazeuses successives et la distribution des points où elles atteignent la surface du liquide, et le léger édifice composé de cloisons emprisonnant dans les espaces qu'elles séparent tous les volumes de gaz qui constituaient respectivement les bulles, acquiert de plus en plus de hauteur. Si les bulles sont très-minimes, l'édifice cloisonné se composera de parties trop petites pour que l'œil les distingue en général, et l'on aura ainsi de la mousse.

§ 189. Retournons aux systèmes laminaires des charpentes, et complétons-en l'étude. Examinons d'abord la manière dont les lames qui doivent constituer l'un de ces systèmes se disposent pendant qu'on retire la charpente du liquide, et immédiatement après qu'on l'a retirée.

Commençons par le cas d'une charpente prismatique retirée de façon que ses bases soient horizontales. Quand la base supérieure sortira du liquide, chacune des arêtes solides dont elle se compose sera nécessairement suivie d'une lame. Cela étant, si l'angle compris entre deux faces latérales adjacentes du prisme est égal ou supérieur à 120°, c'est-à-dire à l'un des angles égaux que forment entre elles trois lames aboutissant à une même arête liquide, les lames, qui partiront, comme je viens de le dire, de toutes les arêtes de la base, devront, on va le voir, demeurer attachées aux arêtes solides verticales, et cela tant que la base inférieure ne sera pas sortie du liquide.

Prenons comme exemple la charpente d'un prisme hexagonal régulier, prisme pour lequel l'angle de deux faces latérales adjacentes est de 120°, et considérons-la lorsqu'elle n'est encore qu'en partie hors du liquide. Supposons, pour un instant, que les lames qui partent des arêtes de la base supérieure rentrent vers l'intérieur de la charpente, auquel cas d'autres lames partiront néces-

sairement des arêtes verticales pour aboutir aux arêtes liquides qui uniront les premières. Toutes ces lames se rattacheront au liquide du vase par de petites masses à courbures transversales concaves, soulevées le long de leurs bords inférieurs; or il est clair qu'en vertu de leur tension, ces mêmes lames aboutiront à la crête des petites masses dont il s'agit suivant des directions verticales; les lames qui partent des arêtes de la base devront conséquemment s'infléchir en descendant vers le liquide, et ainsi elles seront, dans le sens de leur hauteur, convexes vers l'intérieur de la figure. Mais comme elles seront en contact par leurs deux faces avec l'atmosphère libre, il faudra (§ 97) que leur courbure moyenne soit nulle, ou, en d'autres termes, qu'en chacun de leurs points, les courbures, dans deux directions rectangulaires, soient égales et opposées (§ 2); donc, puisque les lames en question sont convexes dans le sens de leur hauteur, elles seront concaves dans le sens de leur largeur; or, par la double raison de cette concavité et de leur direction rentrante vers l'intérieur de la charpente, nos lames feront nécessairement entre elles deux à deux des angles supérieurs à ceux des faces du prisme, et conséquemment supérieurs à 120°, ce qui, nous le savons, est impossible; ainsi ces mêmes lames devront rester, comme je l'ai avancé, adhérentes aux arêtes solides latérales tant que toute la charpente n'est pas hors du liquide.

Cette déduction est pleinement confirmée par l'expérience : quand on retire du liquide glycérique, dans la position indiquée, la charpente d'un prisme hexagonal régulier, on obtient simplement, jusqu'à ce que la base inférieure soit sortie, des lames planes occupant toutes les faces latérales.

L'épaisseur des fils solides, épaisseur qui, dans mes charpentes, approche d'un millimètre, semblerait, à la vérité, suffire pour établir l'indépendance entre ces lames; mais ici elle n'est pour rien dans le phénomène : j'ai fait construire une charpente prismatique hexagonale dans laquelle les arêtes latérales étaient de simples crins, et les choses se sont passées absolument de la même manière. Dans cette charpente, dont la disposition serait difficile à représenter en petit par la gravure, la base supérieure est soulevée par des ressorts, de façon que les crins, qui s'allongent dans le liquide, soient toujours tendus.

§ 190. Mais, on le comprend, il ne peut plus en être ainsi dans le cas d'une charpente dont les bases ont moins de six côtés, car alors les faces latérales faisant entre elles des angles moindres que 120°, les lames qui partent de deux arêtes adjacentes de la base supérieure et qui, le long de l'arête solide verticale correspondante, seraient en communication par l'intermédiaire du liquide qui mouille cette arête, doivent tendre à se détacher de cette même arête et à se diriger toutes deux vers l'intérieur de la charpente, afin de rétablir entre elles l'angle de 120°; alors aussi, bien entendu, elles développeront une troisième lame partant de l'arête solide verticale en question, de telle manière que ces trois lames soient unies par une arête liquide oblique partant du point de jonction des trois arêtes solides.

C'est ce que l'expérience vérifie également : quand on retire du liquide une charpente prismatique à base carrée ou la charpente cubique, on voit, dès que la base supérieure est sortie, les lames prendre une direction rentrante, et l'effet est plus prononcé encore avec la charpente du prisme triangulaire équilatéral; on constate, en même

temps, que ces lames se comportent comme je l'ai avancé dans le paragraphe précédent, c'est-à-dire qu'elles s'infléchissent pour aboutir à la surface du liquide suivant des directions verticales, et qu'elles sont concaves dans le sens de leur largeur.

Quant au prisme pentagonal régulier, pour lequel l'angle de deux faces latérales adjacentes est de 108°, et conséquemment assez peu inférieur à 120°, on conçoit que la tendance des lames à rentrer doit être faible, et qu'ainsi l'épaisseur des fils métalliques dont sont formées les arêtes solides de mes charpentes ordinaires, est suffisante, dans ce cas, pour établir l'indépendance entre les lames; aussi, avec la charpente pentagonale de la *fig.* 78, on n'obtient encore, pendant qu'on la retire, que des lames planes dans les faces latérales; mais j'ai fait faire une charpente dans laquelle les arêtes latérales étaient en fil de fer très-fin, et alors les lames rentraient; seulement, comme cela devait être, elles rentraient beaucoup moins que pour les deux charpentes précédentes. Cette charpente à arêtes latérales fines est représentée *fig.* 83; les bases sont maintenues au moyen de deux anses *a* et *b*, par lesquelles on tient la charpente pour la plonger.

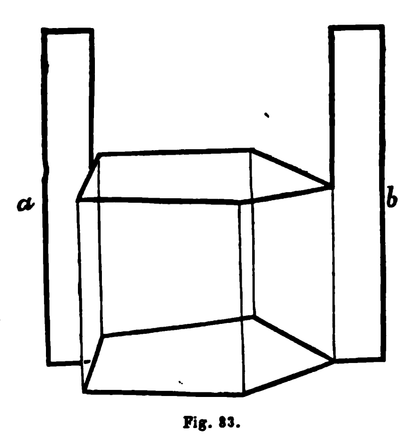


Fig. 83.

§ 191. Voyons actuellement comment ces divers systèmes se complètent, quand on continue à soulever les charpentes. Reprenons d'abord le cas du prisme

hexagonal, et supposons que la charpente ait le rapport de dimensions indiqué à la fin du § 186. Lorsque la base inférieure émerge, il se forme une lame s'étendant de cette base à la surface du liquide, lame qui va en se rétrécissant de haut en bas. Si l'on soulève encore la charpente, on atteint bientôt un point où l'équilibre de cette dernière lame n'est plus possible; car elle se resserre alors spontanément avec rapidité, se ferme en se séparant du liquide du vase, et vient constituer une lame plane dans la base inférieure du prisme. Mais cette lame plane faisant des angles droits avec celles qui occupent les faces latérales, ne pourra, d'après ce qui a été dit dans le paragraphe précédent, persister ainsi; les choses devront se disposer de façon qu'elle fasse avec les lames latérales des angles de 120°. Or c'est ce qui s'effectue de la manière la plus simple : la lame plane dont il s'agit grimpe dans l'intérieur de la charpente en diminuant d'étendue, et tirant ainsi à elle les lames latérales; chacune de ces dernières se plie donc en deux à l'arête liquide qui l'unit à la première, tandis que d'autres lames, partant de chacun des fils solides verticaux, se rattachent aussi aux précédentes suivant les arêtes liquides qui unissent celles-ci deux à deux, et l'équilibre s'établit lorsque la lame centrale a atteint la moitié de la hauteur de la charpente, parce qu'alors tout est symétrique; on a ainsi le système dont j'ai parlé à la fin du § 186

On comprend que, dans ce système, les lames obliques qui se dirigent vers la lame centrale, ne peuvent faire deux à deux des angles de 120° qu'à la condition d'être convexes, dans le sens de leur largeur, vers l'intérieur de la figure, ce qu'entraîne d'ailleurs la courbure rentrante des côtés de la lame centrale; mais, par suite de la néces-

sité d'une courbure moyenne nulle, cette convexité exige que les lames dont il s'agit soient concaves dans le sens de leur hauteur; de cette manière toutes les lois sont satisfaites, et, dans le système réalisé, on constate effectivement ces deux courbures opposées des lames obliques. Quant à la lame centrale et aux lames qui partent des arêtes solides latérales, elles sont nécessairement planes, à cause de leur position symétrique par rapport aux autres.

Une chose à remarquer, c'est que, dans ce même système, les arêtes liquides obliques qui vont aux sommets de la lame centrale, ne partent pas exactement des sommets des deux bases, mais bien de points situés à une petite distance de ces derniers sommets, sur les arêtes solides latérales; on en saisit aisément la raison : par suite de la forme rectiligne des côtés des bases, la convexité transversale des lames obliques ne saurait exister près d'eux; il faut donc, pour qu'elle puisse s'établir, que ces lames n'abandonnent les arêtes solides latérales pour prendre leurs directions rentrantes, qu'à partir d'une certaine distance des bases; c'est donc à cette distance seulement que peuvent naître les arêtes liquides obliques.

§ 192. Passons aux cas du prisme pentagonal à arêtes latérales fines, du prisme quadrangulaire ou du cube, et du prisme triangulaire, cas dans lesquels les lames partant des arêtes de la base supérieure prennent, comme nous l'avons vu, des directions rentrantes dès que cette base sort du liquide. Quand ces lames commenceront à se montrer, les petites masses soulevées à leurs bords inférieurs dessineront nécessairement sur la surface du liquide un polygone du même nombre de côtés que la base solide, c'est-à-dire, suivant la charpente, un

hexagonal, et supposons que la charpente ait le rapport de dimensions indiqué à la fin du § 186. Lorsque la base inférieure émerge, il se forme une lame s'étendant de cette base à la surface du liquide, lame qui va en se rétrécissant de haut en bas. Si l'on soulève encore la charpente, on atteint bientôt un point où l'équilibre de cette dernière lame n'est plus possible; car elle se resserre alors spontanément avec rapidité, se ferme en se séparant du liquide du vase, et vient constituer une lame plane dans la base inférieure du prisme. Mais cette lame plane faisant des angles droits avec celles qui occupent les faces latérales, ne pourra, d'après ce qui a été dit dans le paragraphe précédent, persister ainsi; les choses devront se disposer de façon qu'elle fasse avec les lames latérales des angles de 120°. Or c'est ce qui s'effectue de la manière la plus simple : la lame plane dont il s'agit grimpe dans l'intérieur de la charpente en diminuant d'étendue, et tirant ainsi à elle les lames latérales; chacune de ces dernières se plie donc en deux à l'arête liquide qui l'unit à la première, tandis que d'autres lames, partant de chacun des fils solides verticaux, se rattachent aussi aux précédentes suivant les arêtes liquides qui unissent celles-ci deux à deux, et l'équilibre s'établit lorsque la lame centrale a atteint la moitié de la hauteur de la charpente, parce qu'alors tout est symétrique; on a ainsi le système dont j'ai parlé à la fin du § 186

On comprend que, dans ce système, les lames obliques qui se dirigent vers la lame centrale, ne peuvent faire deux à deux des angles de 120° qu'à la condition d'être convexes, dans le sens de leur largeur, vers l'intérieur de la figure, ce qu'entraîne d'ailleurs la courbure rentrante des côtés de la lame centrale; mais, par suite de la néces-

sité d'une courbure moyenne nulle, cette convexité exige que les lames dont il s'agit soient concaves dans le sens de leur hauteur; de cette manière toutes les lois sont satisfaites, et, dans le système réalisé, on constate effectivement ces deux courbures opposées des lames obliques. Quant à la lame centrale et aux lames qui partent des arêtes solides latérales, elles sont nécessairement planes, à cause de leur position symétrique par rapport aux autres.

Une chose à remarquer, c'est que, dans ce même système, les arêtes liquides obliques qui vont aux sommets de la lame centrale, ne partent pas exactement des sommets des deux bases, mais bien de points situés à une petite distance de ces derniers sommets, sur les arêtes solides latérales; on en saisit aisément la raison: par suite de la forme rectiligne des côtés des bases, la convexité transversale des lames obliques ne saurait exister près d'eux; il faut donc, pour qu'elle puisse s'établir, que ces lames n'abandonnent les arêtes solides latérales pour prendre leurs directions rentrantes, qu'à partir d'une certaine distance des bases; c'est donc à cette distance seulement que peuvent naître les arêtes liquides obliques.

§ 192. Passons aux cas du prisme pentagonal à arêtes latérales fines, du prisme quadrangulaire ou du cube, et du prisme triangulaire, cas dans lesquels les lames partant des arêtes de la base supérieure prennent, comme nous l'avons vu, des directions rentrantes dès que cette base sort du liquide. Quand ces lames commenceront à se montrer, les petites masses soulevées à leurs bords inférieurs dessineront nécessairement sur la surface du liquide un polygone du même nombre de côtés que la base solide, c'est-à-dire, suivant la charpente, un

pentagone, un quadrilatère ou un triangle. Seulement, comme les lames en question sont verticales à leur partie inférieure et qu'elles se joignent sous des angles de 120°, il faudra que les côtés des polygones ci-dessus fassent aussi entre eux des angles de 120°, ce qui exige évidemment qu'ils soient convexes vers l'extérieur; ces côtés doivent d'ailleurs partager la courbure horizontale des lames, courbure que nous savons être concave vers l'intérieur de la figure et conséquemment convexe vers l'extérieur. Cette convexité des côtés de nos polygones devra, on le comprend, être très-légère pour le pentagone, plus prononcée pour le quadrilatère, et plus encore pour le triangle. Tout cela est également vérifié par l'expérience.

Ces premiers faits établis, suivons séparément le développement du système laminaire dans chacune des trois charpentes, à mesure qu'on la soulève davantage.

Avec la charpente pentagonale, le pentagone curviligne dessiné à la surface du liquide va d'abord en se resserrant un peu, jusqu'à ce qu'une partie assez considérable de la hauteur de la charpente soit hors du liquide; puis il s'élargit de nouveau, et, quand la base inférieure affleure le liquide, les lames rentrantes viennent s'appliquer, par leurs bords inférieurs, sur les côtés de cette base. Cependant ces lames n'occupent pas alors les faces latérales du prisme : elles font légèrement, dans le sens de leur hauteur, ventre vers l'intérieur de la charpente, de sorte qu'elles sont unies deux à deux par des arêtes liquides dont chacune constitue un arc de faible courbure s'appuyant par ses deux extrémités sur celles d'une arête solide latérale. Enfin, peu après la sortie de la base inférieure, les phénomènes s'achèvent comme avec la charpente du paragraphe précédent,

c'est-à-dire que la lame produite entre la base dont il s'agit et le liquide vient, sous la forme plane, occuper cette même base, puis monte rapidement en tirant à elle les autres lames, pour donner, en définitive, le système de la *fig.* 78.

Avec la charpente du prisme quadrangulaire, le quadrilatère curviligne dessiné sur le liquide décroît jusqu'à s'annuler, puis est remplacé par une petite arête liquide horizontale, des extrémités de laquelle partent deux arêtes liquides descendantes, qui vont en s'écartant l'une de l'autre; ces trois arêtes limitent une lame plane verticale parallèle à deux des faces du prisme et se rattachant par d'autres lames aux arêtes solides. Les choses ne changent pas de nature quand on continue à soulever: la lame plane en question va simplement en augmentant de hauteur et en devenant de plus en plus large à sa partie inférieure, jusqu'à ce que la base inférieure du prisme commence à se faire jour à la surface du liquide; alors les deux arêtes liquides descendantes s'appuient par leurs extrémités sur les milieux de deux côtés opposés de cette base; puis, après la sortie complète de celle-ci, la lame qui vient l'occuper se transforme rapidement en quatre lames obliques, deux trapèzes et deux triangles, qui complètent le système. Dans le cas particulier du cube, on a ainsi le système de la *fig.* 71. Si la hauteur de la charpente est plus grande que la longueur des côtés des bases, les lames obliques qui s'appuient sur ces dernières sont identiquement les mêmes que pour le cube, et les lames partant des arêtes latérales ainsi que la lame plane centrale ont simplement plus de hauteur.

Enfin, avec la charpente du prisme triangulaire, le triangle curviligne à la surface du liquide décroît plus

vite, et s'annule quand la charpente n'est sortie encore que d'une quantité assez petite, de manière que la pyramide triangulaire qui doit s'appuyer sur la base supérieure dans le système définitif, se trouve complétée ; puis, en continuant à soulever, on voit une arête liquide droite verticale s'étendre du sommet de cette pyramide à la surface du liquide, arête qui est commune aux trois lames partant des arêtes solides latérales. Les choses restent les mêmes pendant qu'on soulève encore, les trois lames ci-dessus et l'arête liquide verticale allant seulement en augmentant de hauteur, jusqu'après la sortie de la base inférieure ; alors la lame qui se rend dans cette base se convertit instantanément en la seconde pyramide triangulaire, qui complète ainsi le système de la *fig.* 74 ; je suppose, bien entendu, que la charpente ait une hauteur suffisante pour ne pas donner le système de la *fig.* 77.

§ 193. Prenons actuellement une charpente symétrique autour d'un axe passant par un sommet, telle que celle d'une pyramide régulière, celle de l'octaèdre régulier, etc., et retirons-la par ce sommet. Il est évident que, dans ce cas, il ne saurait se former de lames occupant les faces qui aboutissent au sommet dont il s'agit, car l'espace qu'elles laisseraient entre elles et le liquide serait vide d'air ; il faut donc, de toute nécessité, que les lames partant respectivement de chacune des arêtes solides se dirigent vers l'intérieur de la charpente.

S'il n'y a que trois arêtes solides se joignant au sommet en question et symétriquement disposées, comme dans le tétraèdre, ou dans le cube que l'on retirerait par un sommet, il est clair que les lames partant de ces trois arêtes solides seront unies par une arête liquide unique descendant verticalement du sommet solide à la surface

du liquide du vase, et c'est ce qui a lieu en effet. Avec le tétraèdre régulier, les choses vont ainsi jusqu'après la sortie de la base, puis le système s'achève de la même manière que celui du prisme triangulaire, et donne le résultat de la *fig.* 73.

S'il y a plus de trois arêtes solides aboutissant au sommet que l'on retire, il devra nécessairement, par le fait d'instabilité dont j'ai parlé §§ 180 et 187, se former des lames additionnelles. Prenons comme exemple l'octaèdre régulier. On comprend que les lames partant des quatre arêtes solides s'uniront, non suivant une arête liquide unique, mais suivant deux arêtes liquides partant du sommet et terminant une lame auxiliaire verticale, de manière qu'à chacune de ces dernières arêtes aboutissent trois lames faisant entre elles des angles égaux. La lame auxiliaire est destinée à former, dans le système laminaire complet, le quadrilatère supérieur (*fig.* 75). Jusqu'à ce que le carré, base commune des deux pyramides qui constituent l'octaèdre, sorte du liquide, l'ensemble des lames conserve la même disposition; puis, pendant que l'on continue à retirer la charpente, on voit se produire des modifications qu'il serait un peu long de décrire, et par suite desquelles le système tend vers la forme dessinée *fig.* 84, où les deux faces *abc* et *a'b'c* sont occupées chacune par une lame plane. Cette forme est complétement atteinte

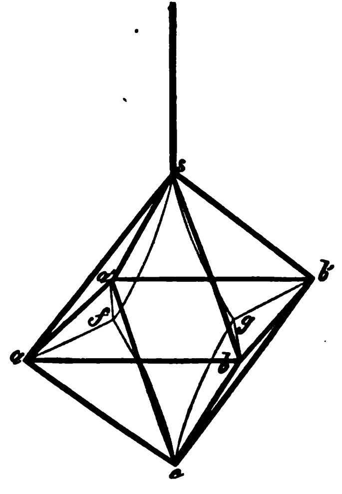


Fig. 84.

au moment où le sommet inférieur de la charpente sort du liquide; mais aussitôt un changement s'opère, et le système prend la forme de la *fig.* 75. Bien que ce changement soit très-rapide, on peut cependant, avec une attention suffisante, et en recommençant plusieurs fois l'expérience, observer comment il se produit: les deux lames qui occupaient (*fig.* 84), comme je l'ai dit, les faces *abc* et *a'b'c*, se relèvent vers l'intérieur de la charpente en tournant autour des arêtes solides *ab* et *a'b'*, et en même temps se développe, à partir du sommet inférieur, un quadrilatère d'abord très-petit, qui grandit jusqu'à ce que son sommet supérieur atteigne le centre de la charpente, et qui constitue alors le quadrilatère inférieur du système définitif; en même temps aussi les sommets *f* et *g* du quadrilatère curviligne *sfgc* remontent d'une certaine quantité, ce quadrilatère se raccourcit, ses arêtes deviennent droites, et il forme enfin le quadrilatère supérieur du même système définitif. La *fig.* 85 représente le phénomène en voie de formation, saisi au moment où le quadrilatère qui s'accroît a acquis la moitié de sa hauteur finale. On comprendra aisément, d'après ce dessin, comment s'engendrent les quatre autres quadrilatères de la *fig.* 75.

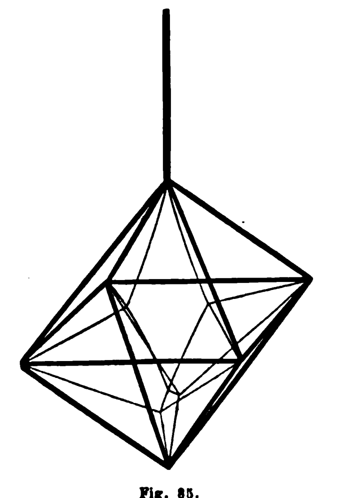


Fig. 85.

Pour que tous ces phénomènes se produisent à peu près à coup sûr, il faut retirer la charpente bien verticalement; il faut, de plus, que cette charpente soit bien construite, que les fils de fer qui la composent aient le

moins d'épaisseur possible, et surtout qu'aux sommets de l'octaèdre, ils s'unissent d'une manière bien nette, du moins du côté qui regarde l'intérieur de la charpente.

Ainsi que je l'ai déjà dit, cette même charpente peut donner aussi des systèmes tout différents de celui de la *fig.* 75. Ces systèmes sont formés de lames courbes ; ils se développent surtout quand on incline légèrement la charpente en la retirant du liquide : l'un d'eux, par exemple, qui s'est montré assez souvent chez moi, contient, en son milieu, une lame hexagonale placée parallèlement à deux des faces de l'octaèdre, et ayant les côtés légèrement rentrants (§ 186) ; ces côtés sont rattachés aux sommets des deux faces ci-dessus par des lames triangulaires, et aux arêtes de ces mêmes faces par des lames trapézoïdales ; en outre, les sommets de la lame dont il s'agit sont rattachés par des lames triangulaires aux autres arêtes solides.

Les différents exemples que j'ai donnés avec détails suffiront pour faire comprendre comment s'engendrent les systèmes laminaires, et pour montrer que la théorie peut rendre compte de toutes les particularités que présente cette génération.

§ 194. Si l'on a soin qu'il n'y ait point de bulles d'air à la surface du liquide du vase avant d'y plonger une charpente, le système laminaire obtenu ne présentera aucun espace fermé de tous les côtés par des lames, et ainsi toutes les lames seront en contact par leurs deux faces avec l'air libre. En effet, pendant qu'on retire la charpente, si le système, avant qu'il éprouve la modification rapide qui lui donne sa dispositon finale, contenait un espace fermé de tous les côtés par des lames, cet espace aurait dû naître et grandir à mesure du soulèvement de la charpente ; or cela est

impossible, puisque l'air qui devrait le remplir n'aurait eu aucune issue pour y pénétrer; par la même raison, le système, dans cette période de sa génération, ne saurait présenter d'espace fermé en partie par des lames et en partie par la surface du liquide; enfin, quand s'opère la modification rapide, la lame ou les lames qui remontent alors dans le système ne trouvant point d'espace de la seconde espèce pour en achever la fermeture laminaire, le système complet satisfera nécessairement à la condition indiquée.

Insistons ici sur une autre loi, savoir que, dans le système laminaire d'une charpente quelconque, toutes les lames constituent des surfaces à courbure moyenne nulle; cela est évident puisque, d'après ce qui précède, toutes ont leurs deux faces dans l'air libre.

§ 195. Revenons aux systèmes des charpentes prismatiques. Outre les faits que j'ai exposés, ces systèmes m'en ont présenté d'autres également curieux, que je vais rapporter ici.

Le système que l'on obtient avec la charpente pentagonale de la *fig.* 78 est, on l'a vu (§ 186), composé de lames sensiblement planes; or si l'on considère les lames obliques qui partent de deux côtés homologues des deux bases pour s'unir à l'un des côtés de la lame pentagonale centrale, et si l'on fait attention que ces deux lames obliques doivent former entre elles un angle de 120°, on verra évidemment que, pour des bases de dimensions données, une augmentation dans la hauteur du prisme entraîne une diminution dans l'étendue de la lame pentagonale centrale, et qu'il y a une limite de hauteur au delà de laquelle l'existence de cette lame est impossible. En supposant que les lames obliques soient rigoureusement planes, on trouve sans peine que la limite

dont il s'agit correspond au cas où le rapport entre la hauteur du prisme et le diamètre du cercle qu'on inscrirait à la base serait égal à $\sqrt{3}$, c'est-à-dire à 1,732; mais, à cause de la petite courbure des lames ci-dessus, on n'a ainsi qu'une valeur approximative; nous connaîtrons plus loin (§ 204) la valeur exacte.

On doit naturellement se demander ce que devient le système laminaire quand cette limite est dépassée. Pour le savoir, j'ai fait construire une charpente dans laquelle la hauteur était environ $2\frac{1}{2}$ fois le diamètre du cercle inscrit, et elle m'a donné un résultat singulier : quand on la retire du liquide glycérique, comme les arêtes latérales sont en fil de fer ordinaire, toutes les faces latérales sont d'abord occupées par des lames planes, et, après la sortie complète, une lame plane se forme aussi dans la base inférieure, puis grimpe entre les autres en formant un pentagone qui va en décroissant, tout cela comme avec la charpente de la *fig.* 78; mais la lame pentagonale décroît beaucoup plus rapidement, puis s'annule, et, à l'instant, le système éprouve un changement brusque, en prenant une disposition bizarre qu'il serait difficile de représenter d'une manière nette par un dessin perspectif, mais dont je vais cependant essayer de donner une idée. Sur les deux bases s'appuient respectivement deux assemblages identiques rentrants, composés de cinq lames courbes, et dont l'un est représenté en projection sur le plan de la base par la *fig.* 86; on voit qu'il y a, dans chacun d'eux, une lame pentagonale, deux lames quadrangulaires et deux triangulaires; ces

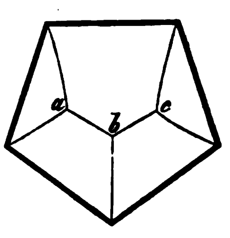


Fig. 86.

deux assemblages sont reliés entre eux par les lames qui partent des cinq arêtes latérales du prisme, et par deux autres lames intermédiaires dirigées aussi suivant la longueur de la charpente et partant des arêtes liquides *ab* et *bc* de l'un de ces mêmes assemblages pour aboutir aux arêtes liquides homologues de l'autre.

Je n'ai pas besoin de faire remarquer que la même chose se produirait encore si, au lieu de dépasser la limite indiquée, on se bornait à l'atteindre, c'est-à-dire si l'on donnait au prisme la hauteur qui correspondrait précisément à la simple annulation de la lame pentagonale; en effet, il y aurait alors dix arêtes liquides aboutissant, au centre du système, à un même point liquide, et conséquemment l'équilibre serait instable.

§ 196. Bien que, dans les systèmes laminaires des prismes à un plus grand nombre de côtés, les lames obliques doivent être notablement courbes, il me paraissait probable qu'il devait y avoir aussi, pour chacun de ces prismes, une limite de hauteur au delà de laquelle le système ne pourrait plus renfermer de lame polygonale centrale, et que cette limite devait différer peu de celle relative au prisme pentagonal. Pour vérifier la chose, j'ai essayé d'abord le prisme hexagonal, avec une charpente dont la hauteur était aussi à peu près $2\frac{1}{2}$ fois le diamètre du cercle qui serait inscrit à la base. Or, à ma grande surprise, il s'est encore formé une lame hexagonale centrale, quoique beaucoup plus petite qu'avec la charpente du § 186 ; mais le système avait subi une modification qui maintenait à l'existence de cette lame sa possibilité : les points des arêtes solides latérales d'où partaient les arêtes liquides obliques (§ 191) étaient situés beaucoup plus loin des sommets des bases, de

sorte que les choses s'arrangeaient à peu près comme si, en réalité, la charpente eût été raccourcie. Dans cette disposition , les lames partant des côtés des deux bases restent donc, jusqu'à une assez grande distance de ceux-ci, adhérentes aux arêtes latérales solides, d'où il suit que l'on doit considérer l'ensemble comme un système laminaire imparfait; je dis imparfait, parce que les lames qui partent de tous les côtés d'une même base sont, dans les parties qui demeurent attachées aux arêtes solides latérales, séparées les unes des autres et rendues indépendantes par ces arêtes.

§ 197. — Avec des prismes dont le nombre des faces latérales excède six, et dans lesquels, par conséquent, l'angle de deux faces adjacentes est supérieur à 120°, les lames demeurent, sur une beaucoup plus grande étendue, attachées aux arêtes solides latérales. Par exemple, avec une charpente octogonale dans laquelle le rapport entre la hauteur et le diamètre du cercle inscrit à la base est à peu près le même que dans les charpentes ci-dessus, la lame octogonale centrale, au lieu d'être petite, est au contraire très-grande, et les deux arêtes liquides obliques partant de l'un quelconque de ses sommets vont s'attacher à l'arête latérale solide correspondante en deux points dont la distance n'est qu'environ le sixième de la longueur de cette arête, et conséquemment un peu moins de la moitié du diamètre du cercle inscrit à la base; dans ce cas donc, les lames qui partent de deux côtés homologues des bases, n'abandonnent les arêtes solides latérales pour se diriger vers la lame octogonale centrale qu'en approchant du milieu de la hauteur de la charpente, et, jusque-là, elles occupent, sous une forme sensiblement plane, les faces latérales du prisme.

Dans la charpente hexagonale du paragraphe précé-

dent, la distance entre les points où s'attachent à une même arête solide latérale les deux arêtes liquides partant de l'un des sommets de la lame centrale, est environ le double du diamètre du cercle inscrit; dans la charpente octogonale, elle est, nous venons de le voir, un peu plus petite que la moitié de ce diamètre; dans une charpente heptagonale, elle est, comme on devait s'y attendre, intermédiaire entre ces deux valeurs, et égale à peu près aux trois quarts de ce même diamètre. J'ai essayé aussi une charpente décagonale, et, dans celle-ci, la distance en question n'est que le sixième du diamètre.

L'épaisseur des fils métalliques a peu d'influence sur ces faits; seulement, avec des charpentes dans lesquelles les arêtes latérales sont en fil de fer très-fin, l'écartement des points d'attache des arêtes liquides obliques augmente un peu.

Mais une petite difficulté se présente : la direction des lames rentrantes est évidemment réglée par la nécessité que ces lames fassent entre elles deux à deux des angles de 120°, et que, d'autre part, elles s'appuient sur les côtés concaves de la lame polygonale centrale. Or, dans les charpentes que nous venons de considérer, il semble que ces conditions seraient également remplies si la lame polygonale centrale était plus petite, et si, en même temps, les lames commençaient à rentrer à partir d'une moindre distance des bases; on peut donc se demander ce qui, dans les charpentes des prismes d'un nombre de côtés supérieur à six, détermine la grande étendue de la lame centrale et le peu d'écartement des points d'attache des arêtes liquides obliques. Disons, dès à présent, que la cause réside dans un principe de minimum que nous exposerons plus loin

(§ 209) et auquel sont soumis tous les systèmes laminaires.

§ 198. J'ai fait construire ensuite une charpente octogonale dont la hauteur n'était que le tiers du diamètre du cercle inscrit. Alors, d'après la valeur donnée plus haut pour l'écartement des points d'attache en question, tous ces points auraient dû être aux sommets du prisme; mais il n'en était pas ainsi: ces mêmes points se trouvaient encore à une certaine distance des sommets, et leur écartement n'était plus que le sixième du diamètre du cercle inscrit; aussi la lame octogonale s'était-elle encore agrandie. Le même effet s'est produit avec un prisme heptagonal dont la hauteur était la moitié du diamètre du cercle inscrit, c'est-à-dire moindre aussi que l'écartement des points d'attache évalué précédemment à l'égard des prismes de ce nombre de côtés.

Du reste, la chose a lieu même dans le prisme hexagonal, puisque (§ 191) avec une charpente de cette espèce dont la hauteur n'était que $1\frac{1}{6}$ fois le diamètre du cercle inscrit, les points d'attache des arêtes liquides obliques se trouvaient encore à une petite distance des sommets.

§ 199. L'explication de ces derniers faits résulte de ce que nous avons dit à la fin du § 191 : considérons une charpente prismatique octogonale ou heptagonale assez haute pour que les lames qui partent des côtés des bases occupent sous une forme sensiblement plane des portions notables des faces latérales. Aux endroits où ces lames quittent les faces en question pour se diriger vers les côtés de la lame polygonale centrale, elles sont, nous le savons, concaves vers l'extérieur dans le sens de leur largeur; si donc on conçoit la charpente traversée par

deux plans perpendiculaires à son axe et passant par les deux séries de points où naissent, sur les arêtes solides latérales, les arêtes liquides obliques, ces deux plans couperont les lames suivant des arcs concaves vers l'extérieur, et si l'on imagine ces arcs solidifiés, l'équilibre du système ne sera pas troublé. D'après cela, si l'on construisait une charpente ayant pour hauteur l'écartement des points d'attache des arêtes liquides obliques sur une même arête solide latérale, et si l'on donnait aux fils de fer qui forment les côtés des bases la courbure des arcs ci-dessus, il est clair que le système laminaire réalisé dans cette charpente aurait ses arêtes liquides obliques partant exactement des sommets; mais avec une charpente de cette hauteur ou d'une hauteur moindre et dont les côtés des bases sont droits, la condition relative aux courbures transversales des lames rentrantes, et conséquemment à la forme d'équilibre de ces lames, ne peut évidemment être satisfaite que si les points d'attache des arêtes liquides obliques se placent à une certaine distance des sommets sur les arêtes solides latérales.

Les faits que nous venons de signaler vérifient, on le voit, ce que nous avons avancé à la fin du § 197 sur la possibilité de l'équilibre, à l'égard d'un prisme d'un nombre de côtés donné avec différentes dimensions de la lame centrale, et différents écartements des points d'attache des arêtes liquides obliques.

§ 200. Si, dans les différents systèmes que nous venons d'étudier, on compare entre elles les lames polygonales centrales, on constate que la courbure de leurs côtés va en augmentant de la lame hexagonale à la lame décagonale, ce qui constitue de nouveaux faits à ajouter à ceux du § 186 en confirmation de la loi relative aux

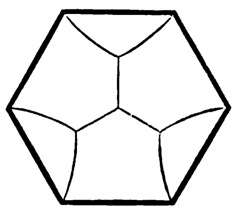
angles sous lesquels les arêtes liquides aboutissent à un même point liquide.

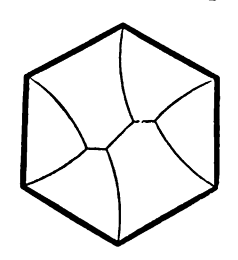
La courbure transversale des lames obliques qui se dirigent vers les côtés de la lame polygonale centrale étant liée à la courbure de ces mêmes côtés, elle doit être moindre dans le prisme heptagonal que dans l'octogonal, et moindre encore dans l'hexagonal; c'est à cause de la faiblesse de la courbure en question dans ce dernier prisme, qu'il donne, quand il n'a pas trop de hauteur, un système laminaire presque parfait, avec sa lame hexagonale.

§ 201. En réfléchissant à la génération des systèmes laminaires, je me suis demandé si, au moins dans le prisme hexagonal, et avec la charpente du § 196, on ne réaliserait pas un système exempt de lame polygonale centrale en retirant la charpente du liquide glycérique de manière que l'axe du prisme fût horizontal, au lieu d'être vertical comme dans les expériences précédentes. J'ai donc fait donner à la fourche une disposition qui me permît d'agir ainsi, et j'ai, en effet, réussi complétement. Bien plus, j'ai obtenu deux systèmes différents, suivant que la charpente était retirée de façon que deux arêtes latérales sortissent en même temps du liquide, ou qu'on en fît sortir d'abord une, puis simultanément ses deux voisines; ces deux systèmes sont du genre de celui qui se réalise dans une charpente pentagonale suffisamment haute (§ 195), c'est-à-dire qu'ils sont composés de deux assemblages de lames courbes obliques reliés entre eux par d'autres lames dirigées suivant la longueur du prisme. La projection de l'un de ces assemblages sur le plan de la base est représentée, dans le premier mode, par la *fig.* 87 et, dans le second, par la *fig.* 88.

Mais ce n'est pas tout; pour produire le premier de

ces deux systèmes, il faut, quand on a retiré du liquide la moitié de la charpente, achever l'opération avec une très-grande lenteur; quand on agit sans cette précaution, il se forme un troisième système d'un autre genre encore, système dont, malgré sa simplicité, il est assez difficile de donner une idée nette par une description ou par un dessin : il contient deux lames hexagonales courbes s'appuyant respectivement, par un de leurs côtés, sur l'un de ceux des bases, et se dirigeant obliquement vers l'intérieur de la charpente ; les autres côtés de ces hexagones ont, comme toujours, une courbure concave ; les côtés courbes de chacun de ces mêmes hexagones sont reliés aux côtés correspondants de la base voisine et aux côtés homologues de l'autre hexagone par des lames courbes ; enfin aux arêtes liquides qui unissent ces dernières lames deux à deux aboutissent d'autres lames partant des arêtes latérales de la charpente. Les côtés des bases sur lesquels s'appuient les deux lames hexagonales appartiennent à la face du prisme qui est sortie la première du liquide.


Fig. 87.


Fig. 88.

Le prisme heptagonal donne des résultats analogues, avec une charpente ayant ses dimensions dans le même rapport. Seulement, d'abord, les trois systèmes sont imparfaits, en ce sens que, dans les deux premiers, les lames qui partent des côtés des bases demeurent, jusqu'à une certaine distance des sommets, adhérentes aux arêtes solides latérales, et que, dans le troisième, les lames qui vont des côtés courbes de l'une des lames hep-

tagonales aux côtés homologues de l'autre, sont attachées, sur la plus grande partie de leur longueur, aux arêtes solides latérales, en affectant, dans cette étendue, une forme sensiblement plane; en outre, nouvelle bizarrerie, le système fourni par le second mode est instable; à peine formé, il commence à se modifier spontanément: les deux assemblages situés près des bases s'allongent, d'abord lentement, puis de plus en plus vite, s'atteignent, et aussitôt apparaît le système imparfait avec la lame heptagonale au milieu. La projection, sur le plan de la base, de l'un des assemblages du système dû au premier mode est représentée *fig.* 89; la projection relative au second mode n'a pu être dessinée, parce que les modifications spontanées qu'éprouve le système empêchent de bien observer celui-ci.

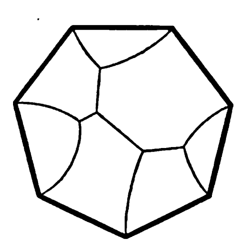


Fig. 89.

Les faits que je viens de décrire, joints à celui que j'ai rapporté à la fin du § 193, montrent qu'avec certaines charpentes, les résultats diffèrent suivant la manière dont on retire ces charpentes du liquide glycérique.

Présumant que l'instabilité du second système de la charpente heptagonale pouvait tenir à ce que cette charpente n'avait pas assez de longueur, j'en ai fait construire une autre dans laquelle la longueur était triple du diamètre du cercle inscrit; mais je n'ai rien gagné; en outre, les deux premiers systèmes se produisaient plus difficilement, et l'on obtenait presque toujours le troisième, c'est-à-dire celui qui contient deux lames heptagonales obliques partant respectivement de l'un des côtés des bases. Enfin, avec une charpente plus allongée encore, on n'a jamais que ce dernier système.

Quant au prisme octogonal, quelque modification qu'on ait fait subir au rapport entre sa longueur et le diamètre du cercle inscrit, il a refusé obstinément de donner autre chose que les systèmes imparfaits avec la lame octogonale au milieu ou avec les deux lames octogonales obliques, et ce dernier est aussi le seul qui se réalise quand le rapport est suffisamment grand.

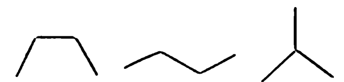
§ 202. M. Van Rees, qui m'a fait l'honneur de répéter mes expériences en Hollande, a trouvé, à l'égard des systèmes laminaires des charpentes prismatiques, un principe fort remarquable qu'il a bien voulu me communiquer, et que je vais exposer ici ; seulement ce principe ne sera compris sans difficulté que des personnes qui ont vu les systèmes auxquels il s'applique.

Les systèmes dont il s'agit sont du genre de ceux dont les *fig.* 86 à 89 montrent des projections. Dans les systèmes de cette espèce, nous le savons, sur chacune des bases de la charpente s'appuie une sorte de pyramide rentrante laquelle a pour sommet de petites arêtes liquides unies entre elles, soit bout à bout en formant des angles, comme dans les *fig.* 86 et 88, soit de manière qu'il y en ait trois aboutissant à un même point, comme dans les *fig.* 87 et 89; de chacune de ces petites arêtes part, nous le savons aussi, une lame parallèle à l'axe du prisme et allant s'attacher, par son autre extrémité, à la petite arête homologue de l'autre pyramide. Or voici l'énoncé du principe de M. Van Rees :

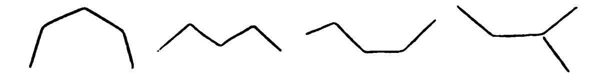
Si n désigne le nombre des faces latérales du prisme, 1° le nombre des petites arêtes formant le sommet de chacune des deux pyramides rentrantes, et conséquemment aussi le nombre des lames longitudinales allant des petites arêtes de l'une des pyramides à celles de l'autre, est $n - 3$; 2° le nombre des systèmes de cette

espèce réalisables dans une même charpente est égal à celui des figures ouvertes différentes qu'on peut former avec les $n - 3$ petites arêtes, sous la condition qu'il n'y en ait jamais plus de trois aboutissant à un même point.

Ainsi, pour le prisme triangulaire, on a $n - 3 = 0$, et nous savons, en effet, que, dans le système laminaire de cette charpente, le sommet de chacune des pyramides rentrantes est un simple point. Pour le prisme quadrangulaire, $n - 3$ est égal à 1, il y a une seule petite arête au sommet de chaque pyramide, et conséquemment un seul système possible de l'espèce que nous considérons. Pour le prisme pentagonal, $n - 3$ est égal à 2, il y a deux petites arêtes, et comme on ne peut former avec celles-ci qu'une seule figure ouverte, savoir un angle (*fig.* 86), il n'y a également qu'un seul système possible de l'espèce en question. Pour le prisme hexagonal, le principe indique trois petites arêtes, et, par suite, les figures :



il y a donc trois systèmes; j'en avais produit deux (*fig.* 87 et 88), et M. Van Rees les a produits tous les trois. Pour le prisme heptagonal, le principe conduit aux figures :



d'où quatre systèmes; mes expériences ne m'en avaient fourni que deux, et tous les quatre ont été obtenus par M. Van Rees. Pour le prisme octogonal, il y a au moins treize figures, et partant treize systèmes; je n'avais réussi à en développer aucun; M. Van Rees en a fait

naître plusieurs, et croit qu'on peut les réaliser tous, mais il pense que la plupart sont instables.

Pour provoquer la génération des systèmes dont il est question ici, M. Van Rees amène d'abord le système qui contient, au milieu de sa hauteur, une lame polygonale parallèle aux bases; puis il replonge d'une petite quantité dans le liquide la base de la charpente, et la retire ensuite; la lame plane qui va alors occuper cette base, et qui emprisonne ainsi de l'air dans l'espace limité par elle, par les lames obliques et par la lame polygonale, monte en chassant cette dernière devant elle, et détermine, au milieu de la figure, une sorte de polyèdre laminaire fermé, dont les faces latérales, en même nombre que celles du prisme représenté par la charpente, sont convexes vers l'extérieur; cela fait, il crève une de ces faces latérales, et le système résultant est alors celui dans lequel les petites arêtes dont j'ai parlé constituent une ligne brisée dont tous les angles sont de même sens. Il passe ensuite de ce système à l'un quelconque des autres qui conviennent à la charpente, en soufflant sur l'une ou l'autre des arêtes liquides parallèles à l'axe, suivant le plan de l'une des lames longitudinales intérieures auxquelles cette arête appartient. Il ajoute qu'on parvient quelquefois plus facilement au premier système de ce genre sans réaliser d'abord le polyèdre laminaire intérieur, en soufflant simplement sur l'une des arêtes de la lame polygonale.

Le principe de M. Van Rees s'applique sans doute à toutes les charpentes prismatiques, quel que soit le nombre de leurs faces latérales; mais je ne pense pas qu'on puisse pousser la vérification expérimentale au-delà du prisme octogonal, pour lequel elle est déjà difficile.

§ 203. Ce n'est pas seulement avec les charpentes

prismatiques que M. Van Rees a employé son procédé du replongement partiel; quand, après avoir obtenu le système ordinaire d'une charpente quelconque, on replonge celle-ci de quelques millimètres par l'une de ses faces, puis qu'on la retire, la lame qui va remplir cette face et qui monte ensuite entre les autres, détermine toujours la formation d'un polyèdre laminaire intérieur. Ce polyèdre a généralement le même nombre de faces que celui qui est représenté par la charpente, et ces faces sont toujours plus ou moins convexes.

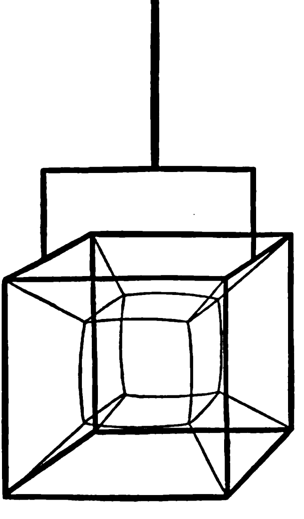


Fig. 90.

On obtient souvent, de cette manière, des résultats fort jolis : par exemple, avec la charpente cubique, le nouveau système (*fig.* 90) contient, en son milieu, un cube laminaire à arêtes et à faces légèrement convexes, rattaché par ses arêtes aux lames partant des arêtes solides; de même, avec la charpente du tétraèdre, le nouveau système présente, en son milieu, un tétraèdre laminaire à arêtes et à faces convexes; etc. On s'explique aisément ces convexités par les lois relatives aux angles des lames et des arêtes liquides.

Les lames qui constituent les polyèdres intérieurs en question, ne sont évidemment pas à courbure moyenne nulle ; c'est qu'elles sont en contact, par une de leurs faces, avec une masse d'air limitée, et non avec l'air libre. Je reviendrai ci-après sur ces mêmes polyèdres, dont M. Lamarle a fait une étude spéciale.

M. Van Rees, qui, ainsi que nous l'avons vu, parvient à modifier certains systèmes par une action convenable du souffle, a fait une application intéressante de ce procédé au système ordinaire de la charpente cubique (*fig.* 71) : dans ce système, la lamelle quadrangulaire centrale est, nous le savons, parallèle à deux faces opposées du cube ; mais, à cause de la symétrie de la charpente, il est évidemment indifférent, pour l'équilibre, que ce parallélisme ait lieu par rapport à un couple de faces ou par rapport à un autre ; la lamelle peut donc occuper également trois positions, et l'on comprend qu'il suffit d'une cause très-légère pour déterminer son choix. Aussi, quand on retire la charpente du liquide glycérique, trouve-t-on la lamelle en question tantôt parallèle aux faces antérieure et postérieure, tantôt parallèle aux faces de droite et de gauche, et il arrive même quelquefois qu'elle se place horizontalement. Or on peut la faire passer à volonté, et plusieurs fois de suite, de l'une de ces trois positions à une autre; il suffit, pour cela, de souffler très-légèrement sur l'une de ses arêtes par la face de la charpente du côté de laquelle se trouve cette arête : on voit alors la lamelle se rétrécir dans le sens du souffle, se réduire à une simple ligne, puis se reproduire dans sa nouvelle position.

Par un moyen que je vais indiquer, on détermine, dans les systèmes de certaines charpentes, une modification d'un autre genre, et assez curieuse : si, après avoir réalisé le système ordinaire du cube, on crève la lamelle quadrangulaire centrale, le système prend immédiatement une disposition toute différente, et également régulière, bien qu'il présente un vide en son milieu; on amène un résultat analogue, mais avec deux vides, en crevant, dans le système de l'octaèdre (*fig.* 75), d'abord

le quadrilatère supérieur, puis la lame qui remplace alors le quadrilatère inférieur.

§ 204. La deuxième partie du Mémoire de M. Lamarle, Mémoire dont j'ai déjà parlé au § 158, contient, à l'égard de mes systèmes laminaires, une suite de résultats dont je vais rappeler les principaux ; ces résultats concernent surtout les polyèdres laminaires intérieurs :

1° Un second procédé pour la réalisation de ces polyèdres laminaires consiste à produire d'abord le système ordinaire de la charpente, puis à gonfler une bulle de grosseur convenable et à l'introduire dans ce système ; elle s'attache aux lames de celui-ci, et, quand on retire le tube qui a servi à la souffler, elle forme aussitôt le polyèdre laminaire intérieur. On peut augmenter ou diminuer à volonté les dimensions de ce polyèdre : pour cela, on y introduit l'extrémité effilée d'un tube, après l'avoir mouillée de liquide glycérique, et on souffle ou on aspire par ce tube.

2° Dans la charpente tétraédrique, les faces du tétraèdre laminaire réalisé à l'intérieur sont de courbure sphérique, et conséquemment les arêtes de ce même tétraèdre sont de courbure circulaire ; le centre de la sphère à laquelle appartient l'une quelconque des faces, est situé au sommet opposé ; enfin le centre de la circonférence à laquelle appartient l'une quelconque des arêtes, est situé au milieu de la corde de l'arête opposée.

3° Dans la charpente du prisme triangulaire, quand le rapport entre la hauteur du prisme et le côté de la base est compris entre certaines limites, on peut, à volonté, par des manœuvres convenables, obtenir, au milieu de la figure résultant d'une seule immersion, une lame triangulaire parallèle aux bases ou une arête liquide parallèle aux arêtes latérales. Entre certaines limites aussi, on peut

développer un prisme triangulaire intérieur, mais les faces de celui-ci ne sont jamais de courbure sphérique.

4° Dans la charpente cubique, les faces de l'hexaèdre laminaire intérieur sont de courbure sphérique, et le rayon des sphères auxquelles elles appartiennent est égal à une fois et demie la droite qui joindrait deux sommets opposés de l'une d'elles.

5° Dans la charpente du prisme pentagonal, pour que le rapport entre la hauteur et le diamètre du cercle qu'on inscrirait à la base corresponde précisément à l'annulation de la lamelle polygonale centrale, il faut que ce rapport soit égal à $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3-\sqrt{5}}} = 1{,}618$.

Avec cette même charpente, quand le rapport est très-peu inférieur à la limite ci-dessus, on peut obtenir, ad libitum, dans le résultat d'une seule immersion, ou bien une lame pentagonale très-petite au milieu de la figure, ou bien l'autre système, c'est-à-dire celui qui présente des espèces de pyramides rentrantes s'appuyant sur les bases. Quant au polyèdre laminaire intérieur, il ne prend des faces de courbure sphérique que dans certaines conditions de volume.

6° Dans la charpente du dodécaèdre régulier, le dodécaèdre laminaire intérieur a ses faces de courbure sphérique, mais d'un très-grand rayon.

7° Dans tous les systèmes ci-dessus avec polyèdre laminaire intérieur, quand les faces de celui-ci sont de courbure sphérique, toutes les lames qui s'étendent de ses arêtes à celles de la charpente, sont planes, et conséquemment toutes les arêtes liquides qui joignent ses sommets à ceux de la charpente, sont droites.

8° A l'égard de la charpente octaédrique, un artifice de raisonnement conduit à priori à cinq systèmes diffé-

rents, systèmes qui sont très-probablement les seuls possibles, et dont je n'avais bien observé que deux (§§ 185 et 193); les trois autres contiennent respectivement, en leur milieu, une lame pentagonale, une lame quadrangulaire trapézoïdale, et une lame quadrangulaire équilatérale. Tous ces systèmes se réalisent à volonté, et on peut les faire passer, également à volonté, des uns aux autres. Dans celui qui n'a que des lames planes (*fig.* 75), les dimensions des différentes parties ont entre elles et avec les dimensions de la charpente, des rapports numériques fort simples ; j'en ai signalé un au § 185.

La théorie convenablement traitée indique, dans ce même système à lames planes, la possibilité de quinze polyèdres intérieurs différents; elle les fait dériver les uns des autres, et le tout se vérifie par l'expérience.

9° Quand on réalise l'un de ces polyèdres intérieurs, on voit se former six petites lames triangulaires qui y aboutissent; en crevant deux ou quatre de ces lamelles, on obtient des systèmes d'un genre particulier, et qu'on peut nommer incomplets. Pour trois de ceux-ci, qui résultent de la disparition de deux lamelles opposées, les polyèdres intérieurs, primitivement octaédriques, sont devenus des hexaèdres, et ont des formes très-élégantes ; la disparition de deux autres lamelles opposées transforme l'un de ces hexaèdres en un tétraèdre d'un aspect curieux à raison du contournement de ses faces.

§ 205. J'ai désigné comme imparfaits (§ 196) les systèmes dans lesquels des lames demeurent, sur une partie de leur étendue, adhérentes à la fois à deux arêtes solides. Les systèmes qui ne présentent pas cette circonstance, je les appelle parfaits parce que toutes les lames y dépendent complétement les unes des autres; sauf quelques cas exceptionnels très rares, on obtient

ces systèmes parfaits dans les charpentes des polyèdres dont tous les angles dièdres sont inférieurs à 120° : par exemple, ainsi que nous l'avons vu, dans celles du tétraèdre, du cube, de l'octaèdre, et des prismes dont le nombre des faces latérales est moindre que six ; la charpente du dodécaèdre régulier, polyèdre dont les angles dièdres ne sont que de 116° et une fraction, donne également un système parfait.

Lorsqu'on a retiré du liquide glycérique la charpente d'un polyèdre dont tous les angles dièdres sont, au contraire, supérieurs à 120°, on trouve toujours simplement chacune des faces, moins une, remplie par une lame plane ; la face qui fait exception demeure vide ; c'est qu'il faut une ouverture pour l'entrée de l'air. Ce ne sont pas là de véritables systèmes laminaires, puisque toutes les lames y sont rendues indépendantes les unes des autres par l'intermédiaire des fils solides ; nous pouvons donc les nommer systèmes nuls : ils se produisent, par exemple, avec la charpente de l'icosaèdre régulier, où les angles dièdres sont de 138° et une fraction, avec celle de l'ensemble de deux pyramides hexagonales ou d'un plus grand nombre de côtés, réunies par leurs bases, et telles qu'aux arêtes de la base commune les angles dièdres surpassent 120°, etc.

Cependant quand tous les angles dièdres dépassent peu 120°, on obtient, dans quelques cas, un système laminaire réel : c'est ce qui a lieu, par exemple, avec la charpente du polyèdre formé en abattant les sommets d'un cube par des sections équilatérales qui se joignent, de manière qu'il n'y ait que des faces triangulaires et des faces carrées. Mais, dans ce polyèdre, tous les angles dièdres ne sont que d'environ 125° ; d'ailleurs le système laminaire réel et symétrique se produit avec difficulté, et

seulement quand on retire la charpente par une face triangulaire ; quand on la retire par une face carrée, elle donne toujours un système nul.

§ 206. Dans le Mémoire que j'ai déjà cité (§ 187), Brewster indique un procédé curieux pour la production des systèmes laminaires de plusieurs charpentes : celle sur laquelle on veut opérer étant préalablement mouillée de liquide glycérique, mais ne contenant aucune lame, on gonfle, dans son intérieur, une grosse bulle, qui s'attache à l'ensemble des arêtes solides, de manière que chacune des faces se trouve occupée par une lame, puis on crève l'une de ces lames, et le système ordinaire apparaît aussitôt. Outre le spectacle singulier de cette transformation instantanée, le procédé de Brewster offre ainsi l'avantage de réaliser les systèmes laminaires en n'exigeant qu'une fort petite quantité de liquide. Je dois avertir que j'ai vainement essayé ce procédé avec mes charpentes ; il est probable que celles de Brewster avaient des dimensions beaucoup moindres ; mais voici un autre procédé qui n'exige également que peu de liquide, et qui m'a donné un plein succès ; je l'ai employé avec les charpentes du cube et des prismes hexagonal et pentagonal, et je ne doute pas qu'il ne convienne aussi pour celles de tous les polyèdres dont aucun angle dièdre n'excède 120° : on verse le liquide glycérique dans une petite assiette, où il peut ne former qu'une couche de quelques millimètres d'épaisseur ; puis, si l'on veut, par exemple, réaliser le système du cube, on plonge successivement dans le liquide les quatre faces latérales de la charpente, de sorte que chacune d'elles se trouve occupée par une lame plane ; enfin on plonge et l'on retire également la base, et le système s'achève aussitôt de lui-même. S'il s'agit d'un prisme, on remplit pareillement, les unes

après les autres, toutes les faces latérales et la base. Je rappellerai ici que les arêtes de ma charpente cubique ont 7 centimètres de longueur.

§ 207. Les systèmes laminaires variant avec la forme des charpentes, on peut imaginer des polyèdres de fantaisie, choisis de manière que tous leurs angles dièdres soient moindres que 120°, en faire construire les charpentes, et les essayer, dans un simple but de curiosité, pour observer les systèmes qui s'y produisent. On obtiendra souvent, de cette manière, des résultats fort jolis.

§ 208. Après avoir mentionné (§ 172) l'expérience de mon fils relative à l'effet de la chaleur sur la tension des lames liquides, j'ai dit que j'en ferais connaître une autre; la voici:

On développe le système de la charpente cubique, puis on introduit l'extrémité fortement chauffée d'une baguette de verre dans l'espèce de pyramide creuse formée par les lames qui partent des quatre arêtes de l'une des faces du cube, et l'on choisit l'une des pyramides dont le fond est une arête de la lamelle centrale; aussitôt on voit cette lamelle diminuer d'étendue. C'est que, par suite de la position de la baguette, la lamelle s'échauffe moins qu'une partie des lames environnantes, et conserve ainsi un excès relatif de tension. On ne peut attribuer l'effet à la dilatation des lames les plus chauffées, car, si toutes les tensions demeuraient égales, la forme du système ne pourrait évidemment se modifier; les lames qui tendraient à se dilater enverraient seulement une portion de leur liquide dans la lamelle centrale.

J'ajouterai ici une expérience étrangère à l'action de la chaleur. Je m'étais dit que si l'on pouvait réaliser

un système dont une partie des lames fussent formées d'un liquide et l'autre d'un autre liquide à tension différente, le système ne pourrait plus satisfaire à mes lois quant à l'égalité des angles entre les lames et entre les arêtes liquides. Une telle réalisation est sans doute impossible d'une manière complète, mais on peut en approcher par le moyen suivant : on produit encore le système de la charpente cubique, et on le pose de manière que la lamelle centrale soit horizontale. Cela fait, si l'on introduit au milieu de cette lamelle l'extrémité d'un petit pinceau imbibé de liquide glycérique, la lamelle n'éprouve aucun changement; mais si le pinceau est imprégné d'un liquide à tension plus forte, on voit la lamelle se contracter très-notablement. J'ai obtenu le meilleur résultat avec une solution d'albumine préparée simplement en battant un blanc d'œuf, puis laissant la mousse se convertir partiellement en liquide : la lamelle qui, dans ma charpente, a environ 13^{mm} de dimension dans les deux sens, se resserre alors jusqu'à n'avoir plus que 8^{mm}; quand on enlève le pinceau, elle reprend rapidement 9^{mm}, puis semble rester en cet état pendant quelques secondes, après quoi elle revient lentement à ses dimensions originaires.

Dans cette expérience, le liquide du pinceau se répand plus ou moins sur la lamelle, de sorte que la portion qui en est recouverte possède la tension appartenant à ce même liquide, tension qui ne peut plus être équilibrée, sans modification du système, par les tensions des autres lames. On verra (§§ 258 et 299) que la solution d'albumine a effectivement une tension de beaucoup supérieure à celle du liquide glycérique.

Un liquide de moindre tension que celui qui constitue le système doit déterminer, au contraire, un agrandisse-

ment de la lamelle, et c'est ce que j'ai également constaté : le système laminaire a été réalisé avec la solution d'albumine, dans une charpente cubique de 5 centimètres de côté; on a déposé sur la lamelle centrale une gouttelette de solution de savon, liquide dont la tension est sensiblement égale à celle du liquide glycérique; aussitôt la gouttelette s'est étendue de manière à remplacer, dans la lamelle, la solution d'albumine, et, en même temps, cette lamelle a pris un accroissement notable.

§ 209. Envisageons maintenant les systèmes laminaires sous un point de vue plus général.

La tension constituant un effort incessant pour diminuer l'étendue des surfaces liquides, il s'ensuit que, dans tout système laminaire, la somme des aires des lames doit être un minimum.

C'est donc là un principe qui régit la constitution de tous ces systèmes.

§ 210. Lorsque j'ai posé ce principe, en 1861, à la fin de ma 6me Série, je comprenais qu'il existe une dépendance nécessaire entre ce même principe et les lois que j'avais trouvées (§ 184) relativement aux nombres des lames unies par une même arête liquide et des arêtes liquides aboutissant à un même point liquide, ainsi qu'aux angles des lames entre elles et des arêtes entre elles; mais je ne pouvais saisir cette dépendance, et il me paraissait à peu près impossible de la découvrir.

Or, dans la première partie du Mémoire dont j'ai résumé plus haut (§ 204) la deuxième, M. Lamarle a repris la question, et en a résolu toutes les difficultés avec une sagacité merveilleuse et un rare bonheur.

Il commence par établir plus nettement que je ne l'avais fait le principe du minimum de la somme des aires; puis, partant de là, il s'occupe des lames aboutis-

sant à une même arête liquide. Il imagine un nombre quelconque de lames planes partant d'arêtes solides et se joignant toutes suivant une arête liquide commune, et il coupe l'ensemble par un plan perpendiculaire à celle-ci. La section se composant de droites partant respectivement de points fixes et aboutissant toutes à un même point, il démontre d'abord, par des considérations de géométrie élémentaire, que si les droites sont au nombre de trois, leur somme sera un minimum quand elles feront entre elles des angles égaux. Si les droites sont plus nombreuses, il démontre, toujours par des considérations aussi simples, que, pour avoir une somme minima d'une manière absolue, il faut substituer au point de concours unique plusieurs points de concours reliés entre eux par des droites additionnelles, de telle façon qu'à chacun de ces points il n'y ait que trois droites faisant entre elles des angles égaux. Enfin, la diminution de la somme des droites commençant dès l'origine de ces modifications, c'est-à-dire, dans le cas de plus de trois droites, par exemple, dès que le point de concours se dédouble pour donner naissance aux droites et aux points additionnels, il s'ensuit que la démonstration s'applique également à des lignes courbes, car on peut toujours remplacer celles-ci par leurs tangentes dans le voisinage immédiat du point de concours. M. Lamarle fait voir alors que tous ces résultats s'étendent aux lames elles-mêmes, planes ou courbes, dont l'ensemble est coupé par le plan dont il s'agit; c'est-à-dire que le minimum de la somme des aires exige que ces lames se joignent trois à trois, sous des angles égaux, à chaque arête liquide.

Ainsi se trouvent complétement démontrées et déduites du principe du minimum deux des lois rappelées plus haut.

M. Lamarle passe ensuite à la question des arêtes liquides concourant en un même point liquide. Pour la traiter, il imagine que des lames liquides planes aboutissent toutes à un même point de l'intérieur du système, et il cherche les conditions que devront remplir ces lames pour qu'elles puissent se joindre trois à trois sous des angles égaux, conformément aux lois précédentes. Il considère le point qui leur est commun comme le centre d'une sphère, qu'elles viennent ainsi couper suivant des arcs de grands cercles; on a de cette manière un certain nombre de pyramides creuses ayant pour sommets un même point, et, pour bases, des polygones sphériques dont tous les angles sont de 120°. M. Lamarle fait d'abord remarquer que ces polygones ne peuvent être que des triangles, des quadrilatères et des pentagones, ce qui lui fournit une relation analytique entre les nombres respectifs de ces différents polygones et le nombre total des lames; il en trouve une autre par la condition que la somme des surfaces de ces mêmes polygones doit représenter la surface totale de la sphère; enfin tous les polygones dont il s'agit doivent être simplement juxtaposés, sans empiétements des uns sur les autres en certains endroits et vides entre eux en d'autres endroits. Au moyen de ces trois conditions, M. Lamarle trouve qu'il n'y a que sept assemblages possibles de lames partant d'un même point et se joignant trois à trois sous des angles égaux.

Si, dans chacun de ces assemblages, on remplace les côtés des polygones sphériques par leurs cordes, on a l'ensemble des arêtes d'un polyèdre, et les sept polyèdres ainsi formés sont : le tétraèdre régulier; le prisme triangulaire droit à base équilatérale, avec un rapport déterminé entre la hauteur et le côté de la base; le cube;

le prisme pentagonal droit à base régulière, avec un rapport déterminé entre la hauteur et le côté de la base; deux polyèdres particuliers composés de quadrilatères et de pentagones; enfin le dodécaèdre régulier. Dans l'intérieur de ces polyèdres, les nombres des arêtes liquides sont respectivement 4, 6, 8, 10, 12, 16 et 20.

Or M. Lamarle démontre que, pour chacun de ces systèmes, à l'exception de celui du tétraèdre régulier, on peut toujours concevoir un mode de déformation d'où résulte, à partir de son origine jusqu'à une certaine limite, une diminution de la somme des aires des lames; la disposition qui a lieu dans le système du tétraèdre régulier, c'est-à-dire quatre arêtes liquides aboutissant à un même point liquide sous des angles égaux, est donc la seule qui puisse se maintenir; celles des six autres systèmes, si elles pouvaient être réalisées, se modifieraient évidemment à l'instant même, pour atteindre la condition du minimum. Ainsi, quand les lames sont planes, les arêtes liquides qui se joignent en un même point liquide sont nécessairement au nombre de quatre, et font entre elles des angles égaux. Enfin M. Lamarle fait voir que la même conclusion s'applique aux lames courbes, et, par suite, aux arêtes courbes; en effet, rien ne limite la petitesse de la sphère mentionnée plus haut, et conséquemment on est maître de supposer cette sphère assez minime pour que les portions de lames comprises dans son intérieur puissent être considérées comme planes.

Les deux lois concernant les arêtes sont donc démontrées par M. Lamarle aussi complétement que celles qui concernent les lames, et également déduites du principe du minimum.

Ajoutons que les modes de déformation supposés par

M. Lamarle, et qu'il parvient, au moyen d'une conception ingénieuse, à faire rentrer tous dans un même principe, sont précisément ceux qui conduisent aux résultats réels, c'est-à-dire aux systèmes permanents que donnent les charpentes en fil de fer.

§ 210bis. Dans une conférence donnée à Prague en 1868, et publiée en 1872 (voir le N° 26 du § 508), M. Mach a décrit le fait suivant : on emprisonne dans une mince membrane de caoutchouc la charpente du tétraèdre régulier, et l'on substitue au fil de fer de suspension partant de l'un des sommets, un tube étroit qui communique avec l'espace intérieur, puis on extrait l'air par ce tube ; on voit alors les faces membraneuses se creuser de plus en plus, les deux parties de la membrane qui s'appuient sur un même fil solide s'appliquer l'une contre l'autre, et l'on obtient enfin le système laminaire avec ses quatre arêtes aboutissant au centre.

Pour expliquer la tendance des surfaces liquides vers un minimum d'étendue, M. Mach émet une idée fort simple : les molécules de la surface d'un liquide sont attirées vers l'intérieur par celles qui sont situées plus profondément; de là une tendance de ces molécules superficielles à pénétrer dans l'intérieur de la masse ou de la lame ; mais, à mesure qu'une partie d'entre elles quittent ainsi la surface, celle-ci s'amoindrit, et le phénomène s'arrête nécessairement lorsqu'elle est devenue un minimum. Cette théorie, on le voit, a beaucoup d'analogie avec celle qu'a présentée M. Lamarle (§ 160) pour expliquer la tension.

CHAPITRE VI.

Théorie de la génération des lames liquides ; moyens différents de produire ces lames; particularités qu'elles présentent suivant le procédé employé pour les développer.

§ 211. Dans les trois chapitres précédents, nous avons étudié les lames liquides au point de vue surtout des formes qu'elles affectent dans les différentes conditions où on les place ; nous allons maintenant aborder une autre question, qui me semble bien digne d'intérêt, savoir la génération même des lames dont il s'agit ; nous essaierons de montrer que cette génération est un résultat nécessaire de la cohésion et de la viscosité du liquide. Nous examinerons donc sous ce rapport les différents modes de production des lames liquides, et nous signalerons en même temps les particularités que présentent les lames obtenues par ces divers moyens.

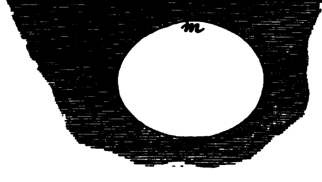


Fig. 91.

Prenons d'abord un cas fort simple, celui de la lame en forme de calotte sphérique développée à la surface d'un liquide par une bulle d'air qui s'est élevée de l'intérieur de ce liquide. Considérons la bulle d'air au moment où elle n'est plus qu'à quelques millimètres de la surface (*fig.* 91)(1). Pour que son sommet franchisse la distance *mn* qui l'en sépare, il faut nécessairement que les molé-

(1) Dans ce dessin, on a représenté la bulle d'air un peu aplatie dans le sens vertical; c'est ce qui a lieu en effet, par suite de la résistance du liquide.

cules liquides situées tout autour de cette petite droite soient chassées dans tous les azimuts à la fois, de sorte que ces molécules éprouveront des déplacements relatifs. Imaginons, pour simplifier, que le mouvement ascensionnel de la bulle d'air soit uniforme, de manière que, dans des intervalles de temps égaux, la bulle chasse, d'entre elle et la surface supérieure du liquide, des quantités égales de ce liquide. Imaginons, de plus, que le liquide n'ait aucune viscosité. Alors, à mesure que la distance *mn* diminuera, les portions de liquide chassées pendant les intervalles de temps ci-dessus prendront des vitesses respectives de plus en plus grandes, puisqu'elles devront effectuer leurs mouvements dans des espaces de plus en plus étroits; ainsi les déplacements relatifs des molécules liquides sont d'autant plus rapides que le sommet de la bulle d'air est plus près d'atteindre la surface. J'ai supposé uniforme le mouvement ascensionnel de cette bulle; mais comme, en réalité, il est accéléré, son accélération augmentera encore l'accroissement de rapidité des déplacements relatifs en question.

Maintenant, on sait que la viscosité oppose aux déplacements relatifs des molécules des liquides une résistance qui croît considérablement avec la vitesse de ces déplacements. Si donc, pour passer au cas réel, nous restituons à notre liquide sa viscosité, la résistance au transport latéral des molécules liquides autour de *mn* ira en augmentant à mesure que cette droite diminuera de longueur, et deviendra très-grande lorsque cette même droite sera devenue très-petite. Il résulte nécessairement de là que lorsque le sommet de la bulle d'air est arrivé près de la surface, l'amincissement de la portion de liquide qui l'en sépare encore ne peut plus s'effectuer avec une rapidité égale à celle du mouvement ascen-

sionnel de ce sommet; et dès lors, pour que l'air qui constitue la bulle continue à monter et passe au-dessus du niveau du liquide, il faut évidemment ou que ce liquide se déchire, ou qu'il soit soulevé. Or on ne peut plus douter, depuis les belles recherches de MM. Donny[1], Henry[2] et Dupré[3], que la cohésion des liquides ne soit du même ordre que celle des solides; on comprend donc que lorsque la distance *mn* sera assez réduite pour que sa diminution ultérieure ne puisse plus se faire avec une rapidité à peu près égale à celle de l'ascension du sommet de la bulle, le liquide présentera encore en *mn* beaucoup trop de résistance à la désunion de ses molécules pour qu'il se déchire, et qu'ainsi il sera soulevé par la bulle sous la forme d'une lame; et comme cette lame, pendant sa génération, est poussée de bas en haut par la bulle d'air et qu'elle tient par son contour au liquide du vase, elle devra être convexe vers l'extérieur.

Dès que la lame a commencé à naître, elle doit se développer davantage : car, d'une part, incessamment poussée par la bulle d'air, elle doit continuer à s'élever, et, d'autre part, le liquide auquel adhère son contour ne peut la suivre en masse à cause de son poids; ce liquide devra donc rester en arrière; mais, la cohésion et la viscosité aidant, il ne pourra y avoir rupture entre la lame naissante et le liquide environnant, et la lame devra simplement s'accroître, jusqu'à ce que l'action de bas en haut exercée sur la partie inférieure de la bulle d'air ait eu tout son effet.

J'ai appelé l'attention (§ 11) sur ce fait que lorsqu'une

(1) *Mémoires de l'Académie de Belgique*, tome XVII des *Mémoires couronnés et des savants étrangers*. Le travail de M. Donny a été présenté à l'Académie en Décembre 1843.

(2) *Philos. Magaz.*, 1845, vol. XXVI, page 541.

(3) *Théorie mécanique de la chaleur*. Paris, 1869, chap. VIII.

masse d'huile un peu moins dense que le liquide alcoolique dans lequel elle est immergée s'élève à la surface de ce dernier, elle s'aplatit d'abord plus ou moins contre cette surface, comme si elle éprouvait une résistance à la traverser, puis qu'après quelque temps, elle se fait jour, et présente alors une portion de surface plane plus ou moins étendue, au niveau de celle du liquide alcoolique. Ce phénomène s'explique maintenant d'une manière naturelle par les considérations qui précèdent : il en est de la sphère d'huile comme d'une bulle d'air, elle ne peut se faire jour à l'extérieur qu'en désunissant les molécules de la couche supérieure du liquide ambiant, mais celle-ci ne pouvant s'amincir assez vite à cause de sa viscosité, résiste à la rupture en vertu de sa cohésion. Seulement il est clair que, dans ce cas, la pellicule ne saurait être soulevée au-dessus du niveau. Enfin les mêmes considérations s'appliquent à l'espèce de résistance qu'éprouvent à s'unir deux masses d'huile qu'on amène l'une vers l'autre dans le liquide alcoolique (§ 6).

§ 212. Revenons à notre lame convexe développée par l'ascension d'une bulle d'air. Lorsqu'elle aura atteint tout son développement, et qu'ainsi elle demeurera stationnaire, elle devra, nous le savons, affecter l'une des figures d'équilibre qui conviendraient à la surface d'une masse liquide sans pesanteur ; or cette figure, qui s'est formée par une action égale dans tous les azimuts autour de l'axe vertical de la bulle d'air, doit évidemment être de révolution, et, comme elle est fermée sur l'axe, elle ne peut (§ 37) constituer qu'une portion de sphère.

Voyons maintenant ce que la théorie nous apprendra sur l'étendue de cette portion par rapport à la sphère complète. En vertu de sa tension, notre lame fait effort pour occuper le moins d'étendue possible. Dès lors, si

l'on néglige certaines particularités dont je parlerai bientôt et qui, du reste, n'ont pas d'influence sensible quand le volume d'air est un peu grand, la question est ramenée à chercher quel est, pour un volume donné, le segment de sphère dont la surface est la plus petite. Ce problème se traite aisément par le calcul, et l'on trouve ainsi que le segment dont il s'agit est un hémisphère; mais on arrive plus simplement encore au même résultat par le raisonnement suivant, dont je dois l'idée à M. Lamarle.

Concevons deux segments sphériques quelconques égaux entre eux et appliqués l'un contre l'autre par leurs bases. Pour que la surface convexe de chacun d'eux soit la moindre possible par rapport au volume renfermé entre elle et la base commune, il suffit évidemment que la surface convexe totale de l'ensemble de ces deux segments soit la moindre possible par rapport au volume total ; or, d'après un principe connu, cette dernière condition sera remplie si l'ensemble constitue une sphère unique, auquel cas chacun des deux segments sera un hémisphère.

Notre lame liquide, si elle contient un volume d'air suffisant, doit donc prendre la forme hémisphérique, et c'est ce que l'observation vérifie, comme tout le monde le sait.

§ 213. Occupons-nous actuellement des petites particularités auxquelles j'ai fait allusion plus haut.

En premier lieu, le liquide du vase s'élève un peu, par l'action capillaire, sur la face extérieure et sur la face intérieure de la figure laminaire, comme il le fait à la base de toute lame qui vient se rattacher à sa surface (§§ 189 et 192); il forme ainsi la petite masse annulaire à surfaces méridiennes concaves sur la crête de laquelle s'appuie la calotte.

En second lieu, on comprend, d'après cela, que si le volume d'air emprisonné est assez petit pour que l'espace circonscrit par le bord de la lame ait peu de diamètre, la surface du liquide dans ce même espace, n'aura aucune partie plane, mais présentera, même en son milieu, une courbure concave plus ou moins prononcée, comme à l'intérieur d'un tube peu large. Ce résultat est d'accord avec l'expérience, et je me suis assuré, par un moyen que j'indiquerai bientôt, que la portion centrale de la surface en question cesse de paraître plane lorsque le diamètre de la lame, à la crête de la petite masse annulaire, est au-dessous de 2 centimètres environ.

Enfin, en troisième lieu, même avec un volume d'air assez grand pour que, dans l'espace circonscrit par la lame, la surface du liquide se montre absolument plane dans la presque totalité de son étendue, cette surface doit être abaissée au-dessous du niveau extérieur par la pression que la lame, en vertu de sa courbure, exerce sur l'air emprisonné, et c'est encore ce que l'on constate par le procédé suivant :

Dans un grand plat de porcelaine posé sur une table en face d'une fenêtre, on verse une couche de liquide glycérique d'environ 2 centimètres d'épaisseur; puis, après avoir gonflé une bulle du même liquide, on la dépose au milieu de la surface de cette couche, où elle forme aussitôt un segment sphérique. On se place alors de façon à voir le ciel par réflexion sur la surface dont il s'agit, et l'on tient un fil noir tendu horizontalement à une petite distance de la lame de telle manière qu'une portion de son image réfléchie s'aperçoive dans l'espace circonscrit par cette lame. L'image totale du fil se montre ainsi formée de trois parties, deux extérieures et une intérieure à la figure laminaire; les deux premières

se recourbent au voisinage de la lame, par suite du relèvement capillaire dont j'ai parlé; quant à la troisième, si la surface circonscrite a, en son milieu, une portion plane, on trouvera, en reculant ou en avançant le fil, une position de celui-ci pour laquelle le milieu de l'image sera rectiligne. C'est ce qui a lieu avec des lames dont le diamètre excède 2 centimètres, mais en deçà de cette limite, toute la partie de l'image intérieure à la lame paraît courbe.

Quand la lame a un grand diamètre, cette partie de l'image du fil est rectiligne dans presque toute sa longueur; elle se recourbe seulement vers ses extrémités, à cause encore du relèvement capillaire; mais sa portion droite n'est pas dans le prolongement des portions droites extérieures à la lame, on la voit un peu plus bas. Cet abaissement, qui montre que la surface plane circonscrite se trouve, comme je l'ai avancé, au-dessous du niveau extérieur, est d'autant moins prononcé que le diamètre de la lame est plus considérable, ce qui doit avoir lieu, en raison de la diminution de la courbure et, par suite, de la pression de la lame, mais il est encore très-sensible pour une lame d'un décimètre de diamètre.

§ 214. Le raisonnement du § 212 suppose nécessairement que la lame s'appuie par son bord même sur la surface plane du liquide du vase, et que la portion de cette surface circonscrite par la lame conserve sa forme plane et son niveau; or ces conditions n'étant jamais toutes entièrement remplies, ainsi que nous venons de le voir, il s'ensuit que le raisonnement en question ne peut être considéré comme suffisamment rigoureux, que lorsque la différence d'avec les conditions imaginaires sur lesquelles il repose est peu notable. Essayons de préciser davantage.

Si l'on remplit de liquide glycérique, jusqu'un peu au-dessus du bord, une large soucoupe de porcelaine préalablement nivelée et posée sur une table vis-à-vis d'une fenêtre, puis qu'après y avoir déposé une bulle, on se place de manière à voir la lame se projeter sur un fond obscur, et que, fermant un œil, on tienne l'autre au niveau de la petite masse annulaire, on distingue parfaitement celle des deux lignes méridiennes de cette petite masse qui regarde l'extérieur de la figure, ainsi que le commencement, à partir du sommet de la crête, de celle qui regarde l'intérieur. On aperçoit donc très-bien ce sommet, et l'on peut dès lors estimer approximativement sa hauteur verticale au-dessus de la surface plane extérieure. On reconnaît ainsi que, pour les grandes calottes, cette hauteur dépasse à peine 2^{mm}, et qu'elle est moindre encore pour les petites. D'autre part, quand la lame a de grandes dimensions, quand, par exemple, son diamètre est d'un décimètre, la portion de la surface du liquide circonscrite dans son intérieur peut être regardée comme exactement plane dans presque toute son étendue. Enfin, d'après les expériences du paragraphe précédent, avec une semblable lame, l'abaissement de cette surface, quoique bien sensible encore, est cependant très-minime. Il suit des résultats du § 121 que la lame supposée hémisphérique et d'un décimètre de diamètre exercerait sur l'air intérieur et, par suite, sur la portion circonscrite de la surface du liquide, une pression équivalente à celle d'une colonne d'eau de $\frac{22,56}{100} = 0^{mm},226$ de hauteur; pour évaluer cette même pression en colonne de liquide glycérique, il suffit de diviser la quantité précédente par la densité 1,1065 de ce liquide, ce qui donne

0^{mm},204. Telle est conséquemment la valeur du petit abaissement que subirait la surface du liquide dans l'espace circonscrit par la lame. Avec un pareil volume d'air et une lame hémisphérique, les choses se trouveraient donc sensiblement dans les conditions du raisonnement en question, et l'on en conclura qu'alors la lame devra prendre en effet cette forme ou que, du moins, l'écart sera inappréciable.

Mais il est aisé de faire voir qu'avec un volume d'air suffisamment petit, la lame sera loin de constituer un hémisphère. Imaginons, par exemple, une bulle d'air n'ayant qu'un millimètre de diamètre, et montant à la surface du liquide ; supposons, pour un instant, qu'elle y forme une calotte hémisphérique. Dans cette hypothèse, la portion de la surface du liquide circonscrite par la lame et comptée à partir du bord de celle-ci ou, si l'on veut, à partir de la crête de la petite masse annulaire, constituerait nécessairement, à cause de ses dimensions minimes, un hémisphère concave, de sorte que la bulle d'air continuerait à former une sphère entière d'un millimètre de diamètre. Cela posé, rappelons-nous que la pression exercée par une lame sphérique en vertu de sa courbure, est (§ 116) la somme des actions dues séparément aux courbures de chacune de ses deux faces, ou, puisque ces deux actions sont égales, le double de l'une d'elles; or l'action de la face intérieure de notre petite lame hémisphérique serait, quant à son effort pour faire descendre la bulle d'air, contrebalancée par l'action opposée de l'hémisphère concave qui limiterait la bulle inférieurement, comme je l'ai dit, et il resterait, d'une part l'action due à la face extérieure de la lame, action qui pousserait la bulle d'air de haut en bas, et, d'autre part, une petite pression hydrostatique

qui pousserait cette bulle de bas en haut si le point inférieur de celle-ci était au-dessous du niveau du liquide. Mais, dans le cas du liquide glycérique, il suit encore des résultats du § 121, en prenant, d'après la remarque faite plus haut, la moitié de la valeur qu'ils donnent, et en divisant par la densité du liquide, que la première des deux actions ci-dessus équivaudrait à une différence de niveau de $10^{mm},19$; tandis qu'en supposant même l'absence de la petite masse annulaire, la seconde ne proviendrait évidemment que d'une différence de niveau égale au rayon de la bulle d'air, c'est-à-dire à $0^{mm},5$. Avec notre petit volume d'air et une lame hémisphérique, l'équilibre est donc impossible; pour qu'il existe, il faut nécessairement que la bulle d'air demeure presque tout entière au-dessous du niveau du liquide, et ne donne ainsi naissance qu'à une lame à peine soulevée et d'une très-faible courbure; alors, en effet, la petite pression hydrostatique qui tendra à faire monter la bulle d'air équivaudra au poids minime d'un volume de liquide un peu moindre que celui de cette bulle, et la légère pression exercée par la lame en vertu de sa faible courbure suffira pour contrebalancer les petites actions opposées.

L'expérience vérifie encore pleinement cette déduction de la théorie. On a versé, jusqu'à une certaine hauteur, du liquide glycérique dans le vase à parois planes en verre servant aux expériences sur les masses d'huile; on a un peu agité le liquide pour qu'il s'y introduisît de petites bulles d'air; on en a choisi une d'environ 1^{mm} de diamètre suffisamment rapprochée de l'une des parois, et on l'a observée à travers cette paroi, en plaçant l'œil successivement un peu au-dessous du niveau du liquide, puis au-dessus. On a reconnu de cette manière que la petite bulle paraissait sphérique, et qu'elle était presque

entièrement plongée, de sorte que la saillie au-dessus du niveau était très-faible..

§ 215. Il est clair, d'après cela, que si l'on forme des lames successives à la surface de l'eau de savon ou du liquide glycérique en leur donnant des diamètres de moins en moins grands, à partir d'un décimètre, on arrivera à une limite au-dessous de laquelle les lames commenceront à se montrer sensiblement affaissées, c'est-à-dire à paraître constituer moins qu'un hémisphère. Pour déterminer approximativement cette limite à l'égard du liquide glycérique, on a déposé, comme je l'ai indiqué dans le paragraphe précédent, les bulles sur la surface du liquide contenu dans une soucoupe un peu plus que pleine, et l'on s'est assuré qu'elles ne paraissent hémisphériques que pour des diamètres supérieurs à 3 centimètres environ; au-dessous de cette valeur, les bulles forment des segments sensiblement moindres par rapport à la sphère entière, et cette diminution est d'autant plus prononcée que le diamètre de leur base est plus petit.

§ 216. Ce que je viens d'exposer sur les calottes laminaires est extrait de ma 6me Série, qui a paru en 1861 ; or, ainsi que je l'ai dit au § 167, M. Van der Mensbrugghe a donné, en 1869, une formule relative à l'équilibre d'une calotte laminaire reposant sur le même liquide ou sur un liquide différent. Voici le passage de son Mémoire qui se rapporte à ce sujet :

« ...... si l'on conçoit la calotte coupée par un plan méridien, la section comprendra deux arcs de cercle parallèles entre eux jusque très-près du niveau du liquide ambiant; dans le voisinage de celui-ci, les arcs iront en s'écartant l'un de l'autre pour rejoindre, le premier, la surface extérieure en passant par un point d'inflexion, et le second, la surface intérieure limitée par la lame,

en demeurant toujours concave. Cela étant, considérons l'une des portions *abcd* (*fig.* 92)(1) de la masse annulaire limitée à partir du sommet *bc*, par deux courbes *ba*, *cd*

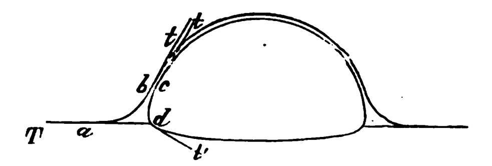


Fig. 92.

telles que je viens de les décrire; si, dans le plan de niveau, nous menons la tangente à la courbe *ab*, cette droite coupera la ligne *cd* en un point *d*. Voyons actuellement quelles sont les forces qui tendent à déplacer dans le sens horizontal le liquide contenu dans la tranche qui a pour limites la crête *bc* de la masse annulaire, les courbes *ab*, *dc*, et la partie rectiligne *ad*; ces forces sont : 1° la tension T du liquide extérieur appliquée en *a*; 2° les composantes horizontales des deux tensions *t* agissant en *b* et *c*; et 3° la composante horizontale de la tension *t'* appliquée en *d* (toutes ces tensions sont d'ailleurs dirigées vers l'extérieur de la petite masse liquide); si donc α et β représentent les angles que font avec l'horizon les tangentes en *b* ou *c* et en *d*, nous aurons :

$$T = 2t \cos \alpha + t' \cos \beta. »$$

Remarquons, à l'égard de la tension *t'* que, lorsqu'on a déposé la bulle, la portion inférieure de celle-ci recouvre nécessairement la surface du liquide à l'intérieur de la calotte, et se mêle sans doute plus ou moins avec ce liquide; la tension *t'* qui appartient à cette portion de surface, est donc très-probablement intermédiaire entre les tensions T et *t*.

(1) Dans cette figure, on a exagéré pour la démonstration l'épaisseur de la lame et les dimensions de la masse annulaire.

J'ai indiqué (§§ 167 et 168) les vérifications auxquelles l'auteur a soumis sa formule dans le cas où les deux liquides diffèrent; mais il applique également cette même formule au cas d'un seul liquide, et, par suite, aux faits des trois paragraphes précédents; il s'exprime ainsi :

« ...... si les trois tensions T, t et t' sont égales entre elles, nous nous plaçons dans le cas d'une lame d'eau de savon, par exemple, formée à la surface du même liquide ; l'équation devient alors : $2 \cos \alpha + \cos \beta = 1$; or, quand la lame est très-grande, la pression exercée sur l'air qu'elle contient est très-faible, et conséquemment β diffère très-peu de 0; il s'ensuit que α est alors très-rapproché de 90°, c'est-à-dire que la lame peut être considérée comme sensiblement hémisphérique. Si nous faisons maintenant décroître les dimensions de la calotte, la pression de l'air intérieur augmente et avec elle β; donc alors α devient de plus en plus petit et la lame constitue une portion de moins en moins grande de la sphère entière. Cette conséquence démontre d'une manière complète ce qui a été exposé à cet égard par M. Plateau. »

On voit, en outre, que si $\cos \alpha$ est très-voisin de 1, on doit avoir $\cos \beta$ très-voisin de -1 ; c'est le cas d'une bulle d'air extrêmement petite, laquelle ne produit dans la surface liquide qu'une saillie imperceptible (§ 214).

Signalons encore une conséquence fort curieuse de la même formule, toujours dans la condition d'un seul liquide : si l'on dépose la bulle, non sur une couche épaisse de ce liquide, mais sur une plaque de verre qui en est simplement mouillée, il ne peut plus y avoir d'enfoncement dans l'espace circonscrit par la calotte; on a donc nécessairement $\cos \beta = 1$, et, par suite,

$\cos \alpha = 0$; dès lors la calotte, même avec un très-petit diamètre, doit être exactement hémisphérique, comme je l'ai avancé à la fin du § 175, et c'est ce que l'expérience vérifie pleinement : on a déposé, sur une plaque de verre préalablement mouillée de liquide glycérique, de petites bulles du même liquide, donnant des calottes de 5^{mm} à 7^{mm} de diamètre, et elles ont paru complétement hémisphériques, tandis que des calottes d'un semblable diamètre flottant sur une couche épaisse du liquide se montraient fortement affaissées.

Enfin la formule de M. Van der Mensbrugghe ne s'applique pas seulement aux lames en forme de calottes, mais évidemment à toute lame qui vient se rattacher à la surface du liquide, comme celles qui partent des côtés de la base supérieure d'une charpente prismatique de moins de six côtés, pendant qu'on retire cette charpente du liquide (§ 192) : quand la surface de celui-ci est plane et au même niveau des deux côtés de la petite masse soulevée à la base de la lame, on a aussi $\cos \beta = 1$ et $\cos \alpha = 0$, d'où il suit que la lame aboutit verticalement à la crête de la petite masse ; c'est d'ailleurs là, comme je l'ai dit au § 189, une conséquence immédiate de la tension.

§ 217. Revenons aux calottes. Bien qu'une semblable lame développée à la surface d'une liquide soit en équilibre de figure, le repos absolu n'y existe cependant pas : l'action de la pesanteur, nous le savons, oblige incessamment les molécules à glisser du haut vers le bas de la lame, de sorte que celle-ci est le siége de mouvements continuels. Ce phénomène, du reste, n'est pas si simple qu'il le paraît au premier aperçu ; nous en ferons, dans les deux chapitres suivants, l'objet d'un examen détaillé.

§ 218. Nous avons commencé (§ 211) notre étude de

la génération des lames, en cherchant comment se forme une calotte sphérique laminaire par l'action d'une bulle gazeuse qui monte de l'intérieur du liquide ; passons actuellement à des lames obtenues à l'aide d'un autre procédé. Reprenons l'expérience du § 20, expérience qui consiste, on l'a vu, à produire, dans un anneau cylindrique solide, au sein du liquide alcoolique, une lentille bi-concave d'huile. Augmentons les courbures de cette lentille jusqu'à ce que les deux surfaces soient près de se toucher par leurs sommets(1). On pourrait croire a priori que si l'on absorbait encore du liquide, la masse se désunirait au point où s'effectuerait ce contact, et que l'huile se retirerait en tout sens vers la bande métallique. Pourtant il n'en est point ainsi : on observe alors, au centre de la figure, la formation d'un petit espace circulaire nettement terminé, à travers lequel les objets ne paraissent plus diminués, et l'on reconnaît aisément que ce petit espace est occupé par une lamelle d'huile à faces planes. Si l'on continue à enlever graduellement du liquide, cette lamelle augmente de plus en plus en diamètre, et on peut l'étendre ainsi jusqu'à une assez petite distance de la surface solide. On a donc ainsi une lame liquide développée au sein d'un autre liquide. Dans mon expérience, le cylindre métallique avait un diamètre de sept centimètres, et j'ai pu agrandir la lame jusqu'à ce que sa circonférence ne fût plus distante de la surface solide que d'environ cinq millimètres; mais, à cet instant, elle s'est rompue, et le liquide qui la constituait s'est retiré avec rapidité vers celui qui demeurait encore adhérent à la bande métallique.

(1) Pour effectuer cette opération, on comprend qu'il faut appliquer le bec de la seringue, non au milieu de la figure, mais près de la bande métallique, où l'épaisseur du liquide est plus grande.

La génération d'une semblable lame reçoit la même explication que celle de la calotte sphérique : en effet, les sommets des deux surfaces concaves ne peuvent marcher l'un vers l'autre sans que du liquide soit chassé d'entre ces sommets vers les parties plus épaisses de la masse, et, en supposant que l'absorption s'opère avec une vitesse uniforme, les mouvements des molécules chassées sont nécessairement d'autant plus rapides que l'espace dans lequel ils s'effectuent se rétrécit davantage; il doit donc arriver un instant où, par suite de la viscosité, la rapidité de ces mouvements ne peut plus correspondre à celle de l'absorption, et alors il faut que la figure liquide ou bien se brise, ou bien prenne une forme hétérogène, car il devient évidemment impossible que ses surfaces continuent à satisfaire dans toute leur étendue à une même condition d'équilibre, c'est-à-dire à avoir partout une même courbure moyenne; mais la cohésion s'oppose à la rupture; de là conséquemment naissance d'une lame plane à laquelle se rattache la masse pleine restante, avec ses faces à courbure moyenne négative.

Remarquons ici, comme à l'égard de la calotte sphérique, qu'aussitôt la lame développée, l'équilibre n'existe plus que dans la forme générale de l'ensemble : par suite de la concavité des courbures de la partie pleine, celle-ci appelle constamment à elle le liquide de la lame, d'où il résulte que cette lame va toujours en s'amincissant, jusqu'à ce qu'elle éclate.

§ 219. Reprenons aussi nos polyèdres d'huile pleins réalisés (§§ 29 et 30) au sein du liquide alcoolique, dans les charpentes en fil de fer. Si, après avoir formé l'un de ces polyèdres, on applique le bec de la seringue vers le milieu de l'une de ses faces et qu'on aspire graduellement de l'huile, on voit se produire des phénomènes

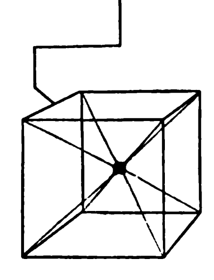
remarquables. Choisissons comme exemple le cube. Dès que la seringue commence à agir, toutes les faces s'enfoncent simultanément et de mêmes quantités, de manière que les contours solides carrés servent de bases à six figures creuses identiques. On conçoit qu'il en doit être ainsi pour le maintien de l'égalité entre les pressions.

Si l'on enlève de nouvelles portions de liquide, les faces se creusent de plus en plus ; mais, pour bien apprécier ce qui se passe lorsqu'on continue cette manœuvre, il est nécessaire d'énoncer ici une proposition préalable. Supposons que l'on introduise dans le vase une plaque carrée en fer, dont les côtés aient la même longueur que les arêtes de la charpente métallique, puis que l'on mette en contact avec l'une des faces de cette plaque une masse d'huile égale en volume à celle qui est perdue par l'une des faces du cube ; le liquide, après s'être étendu sur la plaque, présentera en relief la même figure que la face du cube modifié présente en creux. Alors, en effet, en passant de la surface creuse à la surface en relief, les rayons de courbure correspondants à chaque point ne feront que changer à la fois de signe, sans changer de valeurs absolues ; et, par conséquent (§ 2), puisque la condition de l'équilibre est satisfaite à l'égard de la première de ces surfaces, elle le sera également à l'égard de la seconde.

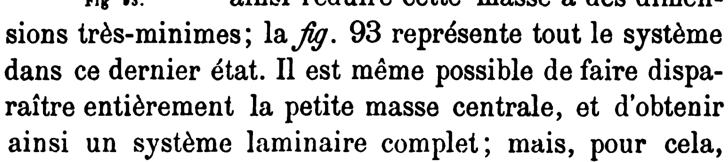
Maintenant, imaginons un plan passant par l'un des côtés de la plaque, et tangent à la surface du liquide qui y adhère. Tant que ce liquide sera en petite quantité, on conçoit, et l'expérience le vérifie, que le plan dont il s'agit sera fortement incliné vers la plaque ; mais si l'on augmente graduellement la quantité du liquide, l'angle compris entre le plan et la plaque ira aussi en croissant, et pourra, d'aigu qu'il était, devenir obtus. Or, tant que

cet angle sera inférieur à 45°, la surface convexe du liquide adhérant à la plaque demeurera identique avec les surfaces concaves de la masse attachée à la charpente métallique et convenablement amoindrie; mais, au-delà de cette limite, la coexistence, dans la charpente, des six surfaces creuses identiques avec la surface en relief, devient évidemment impossible : car ces surfaces devraient se couper mutuellement. Ainsi, quand on continue à enlever du liquide à la masse qui formait le cube, il arrive un point où la figure d'équilibre cesse d'être réalisable d'après la loi ordinaire; or on se trouve alors évidemment dans des conditions analogues à celles de l'expérience du paragraphe précédent; aussi des lames commencent-elles à se former. Ces lames sont planes; elles partent de chacun des fils de la charpente, et lient à ces derniers le reste de la masse, qui continue à présenter six surfaces concaves.

On conçoit, en effet, que, par cette modification de la figure liquide, l'existence de l'ensemble de celle-ci dans la charpente métallique redevient possible, car rien n'empêche plus alors les surfaces concaves de prendre une forme qui s'accorde avec la loi de la courbure moyenne.


Fig 93.

Si l'on enlève encore de nouvelles portions de liquide, les lames vont en s'agrandissant, tandis que la masse pleine, qui occupe le milieu de la figure, diminue de volume, et l'on peut ainsi réduire cette masse à des dimensions très-minimes; la *fig.* 93 représente tout le système dans ce dernier état. Il est même possible de faire disparaître entièrement la petite masse centrale, et d'obtenir ainsi un système laminaire complet; mais, pour cela,



il est nécessaire d'employer certaines précautions que je vais indiquer. Lorsque la masse centrale est devenue assez petite, il faut d'abord essuyer parfaitement le bec de la seringue, sans quoi l'huile adhère à l'extérieur de celui-ci jusqu'à une certaine hauteur, et cette attraction maintient autour de lui une certaine quantité d'huile que l'instrument ne peut absorber dans son intérieur. En second lieu, il faut amener le bec de la seringue assez bas pour qu'il soit près d'atteindre la surface inférieure de la petite masse. Cela étant, on voit, pendant la succion, cette surface s'élever jusqu'à toucher l'orifice de l'instrument, et ce dernier absorbe alors autant de mélange alcoolique que d'huile; mais on ne doit pas s'inquiéter de cette circonstance, et l'on voit la petite masse diminuer par degrés, pour disparaître enfin complétement. Le système est alors celui de la *fig.* 82; mais il ne se forme que pendant l'action de la seringue; si, lorsque cette action est complétée, on retire lentement le bec de l'instrument, on voit se développer la lamelle centrale quadrangulaire du système de la *fig.* 71.

Ainsi, par l'exhaustion graduelle de sa masse, notre cube d'huile se convertit en un système laminaire pareil à celui qu'on obtient immédiatement en retirant la charpente du liquide glycérique; la seule différence est que, dans ce dernier, les arêtes liquides sont, comme je l'ai dit, d'une excessive ténuité, tandis que, dans le système laminaire d'huile, elles ont une largeur visible, ce qui permet de constater ce que j'ai avancé (§ 173), savoir que, dans un système laminaire, les arêtes liquides constituent de petites masses, et qu'elles ont de fortes courbures concaves dans le sens transversal.

Indiquons encore une précaution nécessaire pour la réalisation complète de ce système : à partir de l'instant

où les lames prennent naissance, il faut faire marcher l'épuisement du liquide le plus rapidement possible, jusqu'à ce que la masse centrale ait atteint un certain degré de petitesse. En effet, dès que les lames commencent à paraître, les arêtes liquides commencent nécessairement à se montrer; or ces arêtes, à cause de la concavité de leurs surfaces, exercent (§ 33) une succion sur le liquide des lames, et déterminent ainsi un amincissement graduel de ces dernières; en outre, un appel semblable, mais moins énergique, est produit par la masse centrale, qui présente aussi des surfaces concaves; si donc l'exhaustion de cette masse par la seringue s'effectuait avec trop de lenteur, le système pourrait se rompre avant qu'elle fût terminée. Lorsque la masse centrale est suffisamment réduite, et l'expérience apprend bientôt à juger du point convenable, il faut ralentir de plus en plus l'épuisement, et enfin employer les autres précautions que j'ai mentionnées. Le système laminaire d'huile ainsi formé dans une charpente cubique de 7 centimètres de côté, peut persister une demi-heure.

§ 220. Lorsqu'on est arrivé, pendant l'action de la seringue, au système de la *fig.* 82, si, au lieu de retirer l'instrument avec lenteur, on le détache brusquement par une petite secousse, la lamelle additionnelle ne se développe pas; mais on voit se reformer très-rapidement la petite masse de la *fig.* 93. Ce fait confirme d'une manière remarquable l'explication que nous avons donnée à la fin du paragraphe précédent. En effet, à l'instant où le bec de l'instrument se sépare du système, celui-ci peut être considéré comme composé de pyramides creuses; or les sommets de ces pyramides doivent constituer non de simples points, mais de petites surfaces concaves. Maintenant ces petites surfaces ayant de très-fortes courbures

dans tous les sens, elles donneront lieu à un appel plus énergique que celui qui est dû aux arêtes liquides, car, dans ces dernières, la courbure est nulle suivant une direction; l'huile des lames doit donc se transporter beaucoup plus abondamment vers le centre de la figure que vers les autres parties des jonctions de ces lames; en outre, les douze lames aboutissant à ce même centre, l'huile y afflue par un grand nombre de sources à la fois. Ces deux causes concourent donc pour déterminer, conformément à l'expérience, la réapparition rapide de la petite masse centrale.

Remarquons, en passant, que l'impossibilité de maintenir le système simple des pyramides autrement que pendant l'action de la seringue, c'est-à-dire pendant que le bec de celle-ci constitue un point solide au centre de la figure, nous donne une preuve expérimentale surabondante de l'instabilité d'un système laminaire d'équilibre où plus de quatre arêtes aboutissent à un même point liquide.

§ 221. Tous les autres polyèdres liquides se transforment, comme le cube, par l'exhaustion graduelle de leur masse, en des systèmes laminaires identiques à ceux qu'on obtient avec le liquide glycérique. Je n'ai pu cependant les amener tous à l'état complet; quelques-uns renfermaient encore de petites masses que je ne suis pas parvenu à faire disparaître, et qui altéraient la forme de l'ensemble; mais cela tenait, je pense, à ce que l'extrémité du bec de ma seringue n'était pas assez mince; avec un bec plus effilé, j'aurais sans doute enlevé ces petites masses. Des considérations analogues à celles que j'ai employées à l'égard du cube feraient voir, dans chaque cas, que les lames prennent naissance dès que les surfaces creuses à courbure moyenne constante

cessent de pouvoir coexister dans la charpente solide.

La formation du système provenant de l'octaèdre offre des particularités remarquables : au commencement de l'opération, lorsque les lames naissent, elles sont toutes planes et dirigées vers le centre de la charpente, de manière que le système tend vers la forme représentée *fig.* 94 ; mais lorsque l'exhaustion atteint une certaine limite, un changement brusque se produit : les lames se courbent, et, si l'on continue l'épuisement, le système prend une disposition singulière, dont il est difficile de donner une idée précise par des représentations graphiques. La *fig.* 95 en montre les projections sur deux plans verticaux rectangulaires, et l'on voit que les aspects du système observé sur deux côtés adjacents sont inverses l'un de l'autre.

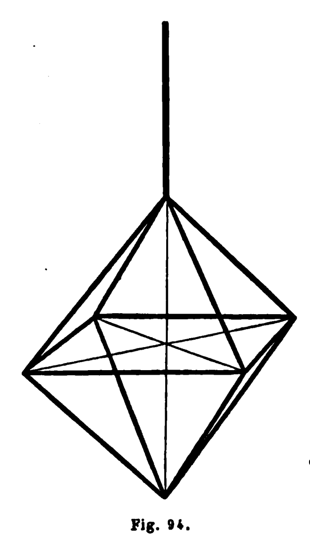


Fig. 94.

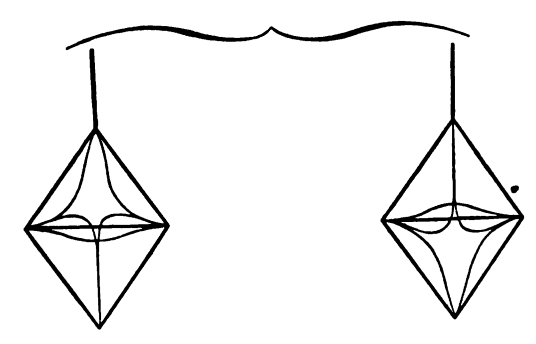


Fig. 95.

En examinant ce même système, on reconnaît sans peine qu'il n'est autre chose que celui de la *fig.* 75, dans

lequel les lames se seraient courbées. La chose s'explique aisément : j'ai dit que la forme de quelques uns de mes systèmes laminaires d'huile était altérée par la présence de petites masses que je n'avais pas réussi à épuiser ; or, dans la charpente octaèdrique, quand, en enlevant graduellement de l'huile, on est arrivé au point où le système se modifie spontanément, les masses de jonction ayant encore une assez grande épaisseur, et l'huile qui les compose s'accumulant, dans le système définitif, tout autour des points où devraient aboutir quatre arêtes liquides de manière à y former des masses beaucoup plus grosses que les arêtes en question, enfin plusieurs de ces mêmes arêtes étant assez courtes pour que les masses qui occupent leurs extrémités soient en communication de courbure entre elles, on comprend qu'il doit résulter de là une influence sur la forme des arêtes et des lames, et il n'est pas douteux que si l'on pouvait, sans déterminer la rupture du système, réduire suffisamment l'épaisseur des masses dont il s'agit, toutes les lames ne devinssent planes.

La modification brusque qui se produit pendant l'exhaustion de l'huile dans la charpente dont nous nous occupons, apporte aussi une preuve expérimentale curieuse de l'instabilité d'un système laminaire d'équilibre qui ne satisfait pas aux lois du § 184 ; en effet, si le système atteignait la disposition de la *fig.* 94, vers laquelle il tend jusqu'à ce que les masses auxquelles aboutissent les lames soient suffisamment réduites, on aurait partout quatre lames à une même arête liquide, et il y aurait six arêtes liquides concourant au centre de la figure.

§ 222. Puisque l'huile se façonne si aisément, dans le liquide alcoolique, en lames minces assez persistantes,

on comprend qu'on doit pouvoir réaliser, avec ces mêmes lames, toutes les figures d'équilibre; et celles-ci seront alors rigoureusement exactes, car on aura éliminé complétement l'action de la pesanteur.

On forme le caténoïde de la manière suivante : les deux anneaux du § 40 préalablement mouillés d'huile étant disposés l'un au-dessus de l'autre dans le liquide alcoolique, on attache à l'anneau inférieur, en des points à peu près équidistants, trois petites masses d'huile ayant chacune environ un centimètre de diamètre(1), puis on abaisse l'anneau supérieur jusqu'à ce qu'il ne soit plus qu'à un ou deux millimètres de l'autre, et on le fait tourner sur lui-même alternativement en deux sens opposés, de manière à étendre aussi uniformément que possible les masses d'huile sur toute la longueur de l'ensemble des deux anneaux. Aussitôt ce point atteint, on soulève l'anneau supérieur, et l'on développe ainsi le caténoïde laminaire entre eux.

Si l'on continue à soulever l'anneau supérieur, on atteint le point où l'équilibre cesse(2), et l'on voit le caténoïde s'étrangler de plus en plus et se convertir, comme le caténoïde laminaire de liquide glycérique (§ 111), en deux lames planes occupant respectivement les deux anneaux.

§ 223. Pour obtenir, dans les mêmes conditions, une sphère laminaire, ou bulle creuse d'huile, on conçoit qu'il faudra d'abord faire adhérer une petite masse de ce liquide à l'extrémité inférieure d'un tube de fer plongé

(1) On amène ces petites masses vers l'anneau métallique au moyen d'un fil de fer (§ 6).

(2) Il peut arriver, avec certaines qualités d'huile, que la lame obtenue de cette manière se déchire toujours avant le point dont il s'agit; en pareil cas, on augmentera un peu la quantité d'huile; on pourra porter le diamètre des petites masses à 12^{mm}, ou même à 14^{mm}.

verticalement d'une certaine quantité dans le liquide alcoolique, puis verser lentement, par l'autre extrémité de ce tube, la portion du même liquide alcoolique qui doit gonfler la bulle.

Mais cette expérience, si simple en principe, exige un assez grand nombre de précautions que je vais indiquer.

Pour faciliter l'introduction du liquide alcoolique, le tube doit être évasé en entonnoir à sa partie supérieure, et, pour qu'il ait une position bien stable, il faut faire adapter à la base de l'évasement un disque en fer de 7 à 8 centimètres de diamètre, traversé à son centre par le tube, et que l'on fera reposer sur le goulot de l'ouverture du couvercle du vase (§ 4). De plus, l'orifice inférieur du tube doit être muni d'un rebord mince d'environ $1^{mm},5$ de largeur; cette addition a pour but d'empêcher la petite masse d'huile destinée à former la bulle de s'élever en partie le long de la paroi extérieure du tube : l'huile s'arrête au contour du petit rebord, conformément aux faits décrits dans le § 14, et se dispose d'une manière parfaitement symétrique. Ajoutons que le diamètre du tube n'est pas indifférent; celui qui m'a donné les meilleurs résultats est de 16^{mm}. La *fig.* 96 représente la coupe du système.

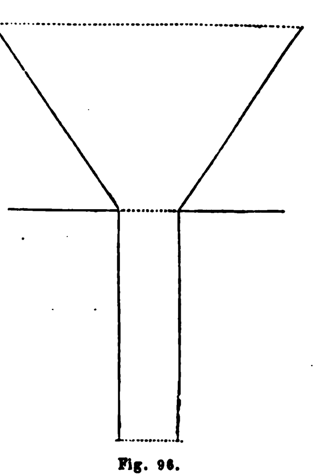


Fig. 96.

Il est évident que le liquide alcoolique dont on veut remplir la bulle doit avoir identiquement la même densité que le liquide alcoolique extérieur. On satisfait sans

peine à cette condition, en enlevant préalablement, par le robinet du vase, une portion du liquide même contenu dans ce dernier, et se servant de cette portion pour gonfler la bulle.

Ce liquide devra nécessairement arriver dans la bulle d'une manière lente et graduelle, surtout au commencement : il devra couler d'abord goutte à goutte, puis en mince filet, et, en outre, tomber dans l'entonnoir près du bord supérieur de celui-ci, afin que, glissant le long de la paroi inclinée avant de descendre dans le tube, il prenne ainsi moins de vitesse. Mais si, pour effectuer cette opération, l'on se contente de tenir en main le flacon qui renferme le liquide dont il s'agit, on ne parvient jamais, quelques soins que l'on prenne, à donner à la bulle tout le diamètre qu'elle peut acquérir, et cela par deux raisons : en premier lieu, il est impossible de graduer d'une manière assez régulière la vitesse de l'écoulement, et le liquide arrivant parfois en trop grande abondance, produit dans l'intérieur de la bulle des mouvements considérables qui font crever celle-ci ; en second lieu, la chaleur de la main augmente quelque peu la température du liquide du flacon, et en diminue ainsi la densité, d'où résulte dans la bulle une tendance à s'élever, qui la fait se porter d'un côté ou d'un autre, et qui, altérant de la sorte la symétrie d'action, amène également la rupture. Pour écarter ces deux causes de non-réussite, j'ai fait construire un flacon en laiton muni d'un robinet et de pieds, de façon que, lorsqu'il était posé sur la plaque de verre qui sert de couvercle au vase, l'orifice du robinet arrivait un peu plus haut que le bord de l'entonnoir; j'introduis dans ce flacon le liquide nécessaire pour former la bulle, et je le laisse ensuite s'écouler dans l'entonnoir par le robinet, avec une vitesse que je

puis graduer à volonté, sans avoir à craindre l'influence de la chaleur de la main[1].

§ 224. A l'aide du système d'appareils que je viens de décrire, on obtient sans peine des résultats très-développés. En donnant à la petite masse d'huile qui devait être attachée à l'orifice du tube un diamètre d'environ trois centimètres, j'ai réalisé souvent de grosses bulles de 12 centimètres de diamètre, et j'aurais été plus loin, sans nul doute, si le vase avait eu plus de capacité[2]. Lorsqu'on est arrivé à la grande dimension que je viens d'indiquer, si l'on enlève l'entonnoir par un mouvement d'une vitesse convenable, la bulle demeure en arrière, et la lame dont elle est formée se prolonge en restant adhérente à l'orifice du tube, de manière à constituer une sorte de traînée; puis celle-ci s'étrangle rapidement et se sépare en deux parties, dont l'inférieure va fermer et compléter la bulle. Ce phénomène s'explique aisément : si, pour simplifier, nous supposons que le mouvement du tube soit effectué dans un sens exactement perpendiculaire au plan de l'orifice, la figure laminaire totale ne pourra évidemment cesser d'être de révolution, et puisqu'elle rencontre l'axe et qu'elle n'est

(1) Je signalerai ici un fait assez curieux. J'avais d'abord employé un flacon de fer-blanc muni d'un robinet en fer; mais quand le liquide alcoolique contenu dans ce flacon renfermait par hasard de petites sphérules d'huile, celles-ci, en sortant du robinet, entraînaient parfois de l'oxyde de fer, et, devenant ainsi très-pesantes, descendaient assez rapidement au fond de la bulle d'huile; or, lorsque cela arrivait, si minime que fût la sphérule ferrugineuse, on voyait, après quelques secondes, la pellicule d'huile s'amincir subitement à l'endroit où reposait cette sphérule, l'amincissement se propageant, par un retrait de l'huile, jusqu'à une petite distance autour du point de contact, puis la bulle crevait presque aussitôt en ce même endroit.

(2) Le vase dont je me suis servi n'avait que 15 centimètres de largeur intérieure; mais ces dimensions sont trop petites; c'est pourquoi, dans le § 4, j'ai prescrit 20 centimètres.

plus simplement une portion de sphère, elle ne peut plus constituer une figure d'équilibre (§ 37); elle doit donc se modifier spontanément, et il est clair que cette modification consistera en ce que la sphère se complète; cette dernière se trouve ainsi entièrement isolée au milieu du liquide qui remplit le vase. Elle persiste en cet état pendant un temps plus ou moins long, qui peut aller quelquefois au-delà d'une heure, après quoi elle crève spontanément. L'expérience apprend bientôt à connaître la vitesse avec laquelle il faut retirer l'entonnoir : si cette vitesse est trop grande, la bulle crève; si elle est trop petite, la bulle s'élève avec le tube, et crève encore quand l'orifice de celui-ci quitte la surface du liquide alcoolique.

Le calcul donne, pour l'épaisseur moyenne de la lame qui forme la bulle dans le cas ci-dessus, $0^{mm},3$, c'est-à-dire moins d'un tiers de millimètre; je dis l'épaisseur moyenne, car la lame n'a pas une épaisseur uniforme, et elle doit être, en certains endroits, beaucoup plus mince que $0^{mm},3$.

On peut demander pourquoi, lorsqu'une semblable bulle est isolée du tube, elle ne persiste pas indéfiniment ; on ne voit, en effet, dans les actions capillaires, aucune raison qui doive amener sa rupture. Il faut, je pense, chercher la cause de cette rupture dans un reste d'action chimique exercé par le liquide alcoolique sur l'huile.

Comme, dans les expériences que je viens de rapporter, je n'avais pu pousser le gonflement des bulles jusqu'à sa limite, j'ai réduit la petite masse initiale à 2 centimètres de diamètre. Alors les bulles se rompaient ordinairement entre les diamètres de 7 et de 11 centimètres. Cependant j'ai réussi quelquefois à élever le

diamètre jusqu'à 12 centimètres, ce qui assigne à la lame une épaisseur moyenne de $0^{mm},09$, c'est-à-dire de moins d'un dixième de millimètre; mais je n'ai jamais pu isoler ces bulles si minces : les unes crevaient spontanément avant que l'entonnoir fût retiré, les autres pendant qu'on le retirait.

Quant à la génération des lames sphériques dont nous nous occupons, il est clair que le liquide graduellement introduit dans la petite masse d'huile, exerce, de dedans en dehors, une pression normale en chaque point de la surface intérieure de la couche d'huile qui l'enveloppe, et qu'ainsi cette couche, que la cohésion empêche de se rompre, doit s'étendre en s'amincissant. Mais, de plus, cet amincissement tend à être uniforme, car s'il se prononçait davantage en un endroit, la viscosité, par les raisons que nous avons déjà données, rendrait plus difficile son progrès ultérieur en ce même endroit, et le reste s'atténuerait alors plus rapidement. Si la lame n'atteint pas rigoureusement une minceur uniforme, cela tient, sans doute, soit à l'irrégularité des petits mouvements du liquide qui afflue, soit à ce que l'huile n'est pas parfaitement homogène, et contient des portions plus visqueuses que les autres.

On comprend qu'en attachant à deux anneaux ou à deux disques en regard une sphère laminaire d'huile ainsi développée et d'un diamètre convenable, on pourra la transformer en cylindre, en onduloïde, ou en nodoïde, comme nous avons transformé en ces figures (§§ 112 à 114) les bulles de liquide glycérique.

§ 225. Appliquons maintenant notre théorie à la génération des lames qui partent des fils solides dont se composent nos charpentes, quand celles-ci émergent de l'eau de savon ou du liquide glycérique. Supposons qu'on

plonge dans l'un de ces liquides un simple anneau horizontal en fil de fer porté par une fourche, puis qu'on le soulève hors du liquide avec une vitesse convenable, en le maintenant toujours parallèle à la surface de ce liquide. Tant que la distance de l'anneau au plan de celle-ci sera très-petite, le liquide s'élèvera un peu, par l'action capillaire, en présentant, à l'extérieur et à l'intérieur de ce même anneau, deux petites surfaces à courbures méridiennes concaves. Or il est aisé de voir qu'à mesure que l'anneau continuera à monter, ces deux petites surfaces iront en se creusant progressivement dans le sens méridien. On sait, en effet, que lorsqu'on soulève lentement un disque solide préalablement mis en contact par sa face inférieure avec la surface d'un liquide susceptible de le mouiller, la portion de ce liquide soulevée par le disque au-dessus du niveau présente bientôt, dans le sens méridien, un creusement qui augmente à mesure que le disque monte; la chose doit donc avoir lieu aussi pour celle de nos petites surfaces qui regarde l'extérieur, et il est clair que l'autre petite surface, c'est-à-dire celle qui regarde l'espace intérieur à l'anneau, doit, pour l'équilibre capillaire de la petite masse soulevée par celui-ci, subir des modifications analogues.

Nos deux petites surfaces iront donc en se rapprochant mutuellement à mesure que l'anneau poursuivra sa marche ascensionnelle, jusqu'à ce qu'elles soient près de se toucher. Mais elles ne peuvent se rapprocher ainsi, qu'en chassant une portion du liquide compris entre elles; or, si l'ascension de l'anneau n'est pas trop lente, la viscosité et la cohésion du liquide agiront ici comme dans les cas précédents, et il se formera, par les mêmes raisons, une lame, qui s'étendra entre la petite portion

de liquide demeurée suspendue le long de l'anneau et la petite masse annulaire soulevée à la surface du liquide du vase.

Il est évident que ces considérations s'appliqueraient également au cas où l'anneau, pendant qu'on le retire, serait oblique ou vertical, au lieu d'être horizontal, et qu'elles s'appliqueraient de même à celui où le fil de fer, au lieu d'être courbé circulairement, serait plié suivant un polygone quelconque : toujours il se formerait, par les mêmes causes, une lame entre lui et la surface du liquide ; si donc nous plongeons dans l'eau de savon ou dans le liquide glycérique l'une de nos charpentes, les fils de fer qui la composent devront, à mesure qu'ils sortent du liquide, être rattachés à celui-ci par des lames, comme le montre, en effet, l'expérience.

§ 226. Reprenons notre anneau horizontal, retirons-le du liquide en le maintenant bien parallèle à la surface de celui-ci, et dirigeons notre attention sur la lame rentrante qu'il entraîne. L'anneau étant circulaire, cette lame constituera une figure de révolution, et puisqu'elle est en contact par ses deux faces avec l'air libre, sa figure sera nécessairement une portion de caténoïde. Essayons de déterminer comment cette portion est située dans le caténoïde complet.

La lame peut évidemment être considérée, par la pensée, comme appartenant à un caténoïde laminaire compris entre notre anneau et un autre anneau égal placé au-dessous à une distance convenable. Cela posé, nous savons (§§ 58 et 80) qu'entre deux anneaux égaux dont l'écartement est moindre que l'écartement limite, il y a toujours deux caténoïdes possibles inégalement rentrés ; mais nous savons aussi (§§ 60 et 111) que lorsqu'on effectue l'expérience, soit dans le liquide alcoo-

lique avec une masse d'huile pleine ou avec une lame d'huile, soit dans l'air avec une lame de liquide glycérique, c'est toujours le caténoïde le moins rentré qui se produit, l'autre étant très-probablement instable ; on doit admettre conséquemment que, dans l'expérience actuelle, la lame qui s'étend entre l'anneau et le liquide du vase, devra toujours appartenir au caténoïde le moins rentré, et c'est ce qui a lieu, en effet, comme on peut s'en convaincre en observant, dans cette même expérience, le peu d'obliquité de la lame.

Il suit de là qu'en employant un anneau d'un diamètre assez grand, de 70^{mm}, par exemple, l'espace circonscrit par la petite masse annulaire qui rattache la lame au liquide du vase sera suffisamment étendu pour que la surface de ce liquide puisse y être regardée comme plane et au même niveau qu'à l'extérieur ; conséquemment la lame, à cause de sa tension, aboutira à la crête de la petite masse annulaire suivant une direction verticale, et c'est ce que vérifie encore l'aspect de la figure réalisée. La chaînette méridienne de notre portion de caténoïde peut donc être considérée sans erreur appréciable comme ayant son sommet à la crête de la petite masse annulaire ; d'où nous conclurons enfin que notre lame constitue la moitié du caténoïde qui serait compris entre deux anneaux égaux à celui d'où elle part et éloignés l'un de l'autre d'une quantité double de la hauteur verticale de cette lame.

§ 227. Mais, entre deux anneaux égaux, il n'y a, nous le savons encore, de caténoïde possible que jusqu'à une limite d'écartement à fort peu près égale aux deux tiers du diamètre de ces anneaux, et, lorsqu'on atteint cette limite, le caténoïde réalisé, s'il est laminaire, s'étrangle spontanément, et se convertit en deux lames planes

occupant respectivement les deux anneaux; notre lame actuelle doit donc se transformer spontanément en une seule lame plane dans l'anneau, lorsque celui-ci, en montant graduellement, atteindra, au-dessus de la crête de la petite masse annulaire, une hauteur égale à la moitié de la limite que je viens de rappeler, c'est-à-dire lorsque la distance du plan de l'anneau à la crête en question sera à très-peu près égale au tiers du diamètre de cet anneau.

Pour soumettre la chose au contrôle de l'expérience, on a attaché l'anneau, par la queue de sa fourche, à l'extrémité de la lunette d'un cathétomètre (§ 110). On a posé, à une certaine distance au-dessous de cet anneau, une capsule complétement pleine de liquide glycérique, puis, abaissant le système de la lunette jusqu'à ce qu'il n'y eût plus qu'un très-petit intervalle entre la surface du liquide et l'anneau, on a rendu celui-ci exactement parallèle à cette surface en courbant un peu, à l'aide d'une pince, la queue de la fourche. Cela fait, on a descendu encore le système, de manière que l'anneau plongeât dans le liquide, et on l'a remonté ensuite avec précaution au moyen de la vis du mouvement graduel, jusqu'à ce que la lame commençât à se former, puis on l'a descendu de nouveau, mais seulement de la quantité nécessaire pour annuler la lame, de façon que la circonférence inférieure de l'anneau fût sensiblement à la crête même de la petite masse annulaire. On a fait alors la première lecture à l'échelle de l'instrument, après quoi on a remonté le système, par le grand mouvement, d'une quantité un peu moindre que le tiers du diamètre de l'anneau, et l'on a continué, avec beaucoup de ménagement, à l'aide de la vis du mouvement graduel. Or on n'a pas tardé à voir la lame se rétrécir spontanément,

et avec assez de rapidité, à sa base, se fermer en cet endroit en se séparant du liquide, et se rendre tout entière dans l'anneau pour l'occuper sous la forme plane. Enfin, après la terminaison du phénomène, on a fait la seconde lecture à l'échelle. Le diamètre intérieur de l'anneau employé était, d'après une mesure prise simplement avec une règle divisée, de $69^{mm},6$; or la différence des hauteurs lues sur l'échelle, c'est-à-dire la distance du dessous de l'anneau à la crête de la petite masse annulaire, était de $22^{mm},57$, quantité très-voisine du tiers de la précédente.

Ce résultat ne constitue pas une vérification précise, mais il suffit, quant à présent, pour montrer l'accord de l'expérience avec la théorie.

§ 228. Il nous est aisé actuellement d'expliquer le développement des sphères laminaires complètes par l'insufflation à travers un tube évasé.

Lorsqu'on plonge dans l'eau de savon ou dans le liquide glycérique l'orifice évasé d'un tube ouvert à l'autre extrémité, celui de la tête d'une pipe de terre, par exemple, et qu'on le retire ensuite, il se forme nécessairement une lame partant du bord de cet orifice ; or si le soulèvement du tube est opéré de manière que le bord en question demeure horizontal, ce même bord jouera évidemment le rôle de notre anneau, et la lame sera une portion de caténoïde. Si donc l'on continue à soulever le tube, la lame se fermera bientôt à sa base, se séparera du liquide, et ira, sous la forme plane, remplir l'orifice. Quand on veut gonfler une bulle, on ne prend pas, il est vrai, la précaution de maintenir l'orifice horizontal pendant l'ascension du tube, et alors la lame ne peut plus appartenir au caténoïde; mais on comprend qu'elle affecte une forme plus ou moins analogue, et que,

participant des propriétés de cette figure, elle se séparera de même du liquide, en donnant aussi pour résultat une lame plane dans l'orifice ; c'est d'ailleurs ce qu'on vérifie sans peine au moyen de l'anneau du paragraphe précédent, en le tenant à la main par la queue de sa fourche et en le retirant du liquide dans une position oblique.

Lorsqu'on s'éloigne du liquide après avoir plongé et retiré l'orifice évasé du tube, cet orifice emporte donc toujours avec lui une lame plane. Cela étant, si l'on souffle ensuite par l'extrémité non évasée, la lame en question se trouvant soumise sur l'une de ses faces à un excès de pression de la part de l'air, elle devra ou se briser ou se bomber vers l'extérieur ; or, à moins qu'elle ne soit d'une minceur excessive, sa cohésion sera plus que suffisante pour l'empêcher de se rompre ; elle commencera conséquemment à se bomber en s'étendant ; et comme d'ailleurs les lames d'eau de savon ou de liquide glycérique ne s'amincissent que lentement par la descente du liquide vers leur partie la plus basse, notre lame continuera à se bomber et à s'étendre ; enfin, puisqu'elle s'appuie sur une périphérie circulaire et qu'elle est continue dans toute son étendue à partir de cette périphérie, elle constituera une portion de sphère.

Par le progrès de l'insufflation, la portion de sphère ainsi formée doit aller toujours en augmentant de diamètre ; mais cette augmentation finit par amener la rupture de la lame ; en effet, celle-ci s'amincit au fur et à mesure, d'abord par son extension même, en second lieu par la descente graduelle des molécules vers sa partie inférieure, et enfin, du moins quand il s'agit d'une simple solution de savon, par l'évaporation de l'eau. Il doit donc arriver un instant où la lame sera tellement atténuée, qu'elle éclatera pour la cause la plus légère.

Maintenant si, avant d'approcher du point où ce dernier phénomène se produirait, on cesse de souffler et l'on donne au tube un mouvement assez rapide de bas en haut, la bulle, par suite de son inertie et de la résistance de l'air ambiant, restera plus ou moins en arrière; mais, à cause de sa cohésion et de son adhérence au bord solide, la lame, en général, ne se brisera pas, et la bulle demeurera unie, pour un instant, à ce bord par une traînée laminaire, comme la bulle d'huile du § 224; puis la traînée s'étranglera de même, pour se séparer en deux portions, dont la supérieure remontera vers l'orifice et occupera celui-ci à l'état de lame plane, tandis que l'inférieure ira fermer la bulle, en sorte que cette dernière se trouvera isolée dans l'air et à l'état de sphère entière; seulement ici le phénomène s'effectue avec trop de rapidité pour que l'œil puisse en saisir le progrès. Quant à la lame plane qui s'est de nouveau logée dans le bord solide, elle pourra, si elle n'est pas trop mince, servir à gonfler une seconde bulle, et les enfants savent, en effet, parfaitement former ainsi plusieurs bulles de savon successives sans replonger l'orifice dans le liquide.

Tout le monde sait qu'on peut aussi gonfler des bulles à l'extrémité d'un tube étroit non évasé; par exemple à l'extrémité du tuyau d'une pipe dont on a enlevé la tête. Dans ce cas, lorsqu'on a plongé dans le liquide le bout du tube et qu'on l'en retire, la capillarité maintient à l'intérieur une petite colonne de ce liquide, et lorsqu'on souffle ensuite par l'autre bout, la colonne ci-dessus va former à l'orifice une petite masse dans laquelle l'air s'introduit pour l'étendre et la façonner en bulle, absolument comme le fait le liquide alcoolique à l'égard de la petite masse d'huile dans l'expérience du § 224.

§ 229. Arrivons à des lames dans la génération des-

quelles le rôle de la cohésion et de la viscosité n'est pas tout à fait le même qu'à l'égard des précédentes.

Rappelons un procédé connu, mais singulier, pour la réalisation de lames liquides planes ou à peu près telles : on prend entre les deux mains, par le fond et par le goulot, un flacon renfermant une petite quantité de liquide, et soigneusement bouché ; on le tient horizontalement, et on lui imprime un mouvement qui oblige le liquide à en balayer toute la surface concave intérieure ; dès qu'on s'arrête, on voit en général une ou plusieurs lames planes disposées en travers du flacon ; on peut ensuite redresser ce dernier et le placer sur une table avec ses lames, qui sont alors horizontales ; je suppose, bien entendu, qu'on emploie un liquide donnant une persistance suffisante, tel que de l'eau de savon ou du liquide glycérique.

On s'expliquera de la manière suivante la génération de ces lames : au moment où l'on cesse le mouvement du flacon, le liquide, qui forme une couche sur toute la surface concave intérieure, ralentit sa rotation, et la portion qui occupe alors la moitié supérieure de cette surface, retombe par son poids ; or, à cause des irrégularités inhérentes à la manœuvre, cette chute du liquide a lieu de préférence en certains endroits, où la couche a le plus d'épaisseur ; là il se forme donc, en travers du flacon, des rideaux de liquide d'une épaisseur considérable ; ces rideaux s'amincissent rapidement par la descente ultérieure du liquide qui les constitue, mais les portions qui descendent ainsi diminuant de plus en plus de masse, leur mouvement est de plus en plus entravé par la viscosité ; enfin quand elles sont suffisamment réduites, elles ne peuvent plus marcher que très-lentement, et les rideaux en question sont devenus de véritables lames.

Les lames réalisées par ce procédé avec du liquide glycérique, présentent des propriétés remarquables : elles ont une étonnante durée, et leurs teintes atteignent le noir. Pour obtenir les meilleurs résultats, il faut choisir un flacon aussi exactement cylindrique que possible ; il faut, en outre, après avoir redressé celui-ci, le poser sur une tablette à vis calantes, afin de rendre bien horizontale la lame qu'on veut observer ; on juge de cette horizontalité par la disposition des teintes.

Au printemps de 1862, la température de la chambre étant de 21°, on a formé, dans un flacon de 7 centimètres de diamètre, une semblable lame, avec un liquide glycérique qui n'était pas des meilleurs ; on n'avait pas eu égard au petit défaut de cylindricité du flacon, et la lame était un peu bombée, tournant sa convexité en haut. Elle s'est bientôt partagée en anneaux colorés irréguliers, puis une tache noire s'est montrée, et l'on a fait mouvoir avec précaution les vis calantes de manière à amener et à maintenir cette tache à peu près au centre ; le noir s'est ensuite étendu graduellement avec des alternatives d'arrêt et de petite diminution, et ce n'est qu'après 17 jours que la lame s'est montrée noire dans sa totalité ; le lendemain, c'est-à-dire 18 jours après sa formation, elle a éclaté, mais on avait, par mégarde, produit un ébranlement du plancher ; sans cette circonstance, elle aurait peut-être persisté plusieurs jours encore.

Pendant l'été de 1865, on a fait encore, avec un liquide glycérique récemment préparé et dont les bulles d'un décimètre ne persistaient que 5 et 6 heures, une lame de cette espèce dans un flacon de 10 centimètres de diamètre, puis on a placé celui-ci, à l'aide d'un soutien convenable, dans une position inclinée d'environ 30° à l'horizon, de manière que le plan de la lame faisait ce

même angle avec la verticale. Cette lame est devenue entièrement noire après une heure ou deux, je pense, et elle a persisté en cet état pendant près de 10 jours, malgré son grand diamètre et son inclinaison.

J'ai dit, en parlant de la première de ces lames, qu'elle était légèrement bombée et tournait sa convexité vers le haut. Cette forme provenait de ce que le flacon allait quelque peu en s'élargissant de la partie inférieure à la partie supérieure; nous savons, en effet (§ 216), qu'en vertu de sa tension, une lame qui s'appuie sur une surface solide, doit être dirigée normalement à cette surface; or si la surface intérieure du flacon est exactement cylindrique, une lame plane transversale remplira cette condition de perpendicularité; mais si le flacon est plus ou moins conique, il n'en est pas de même, et la lame se courbe alors de manière que ses derniers éléments soient normaux à la surface solide. Si le flacon était un peu plus large en bas qu'en haut, la lame se courberait évidemment en sens contraire; mais, dans ce cas, le liquide se rassemblerait, par l'action de la pesanteur, vers le milieu de la lame, et conséquemment celle-ci ne pourrait jamais devenir noire dans toute son étendue; il faut donc, si l'on ne peut se procurer un flacon tout à fait cylindrique, en prendre un dont le plus grand diamètre soit en haut.

La plupart des liquides, sinon tous, sont susceptibles de donner ainsi des lames transversales dans un flacon : j'en ai obtenu, par exemple, avec de l'eau distillée, dans un flacon de 14 centimètres de diamètre; seulement elles n'avaient aucune persistance.

§ 230. Certaines lames sont développées par l'étalement d'un liquide en mouvement. Savart a le premier appelé l'attention sur ces lames dans deux beaux

Mémoires dont nous allons résumer ici les parties qui intéressent notre sujet.

Dans le premier(1), le célèbre physicien étudie spécialement les phénomènes qui se produisent lorsque la partie continue d'une veine liquide lancée verticalement de haut en bas par un orifice circulaire, vient frapper normalement le milieu d'un petit disque solide. Dans ces conditions, le liquide s'étale en une nappe ou lame qui, toutes choses égales d'ailleurs, affecte des formes différentes suivant la vitesse de l'écoulement. Citons ici le passage où Savart décrit les phénomènes d'une manière générale; le vase est un large tube vertical fermé inférieurement par une plaque au centre de laquelle est percé l'orifice; la charge est originairement de 2 mètres, et le vase se vide librement; le liquide est de l'eau.

« Pour fixer les idées, nous supposerons que le disque ait 27^{mm} de diamètre, que la distance de ce disque à l'orifice soit de 20^{mm} et le diamètre de l'orifice de 12^{mm}. A l'instant où l'écoulement est établi, si le liquide est parfaitement calme dans le tube, la veine après avoir frappé le disque se répand dans tous les sens, et forme une nappe circulaire et continue, dont le diamètre a environ 60 centimètres. La partie centrale de cette nappe est mince, unie et transparente, mais son pourtour, qui a une plus grande épaisseur, est trouble et se présente sous l'aspect d'une zone annulaire recouverte d'un grand nombre de stries rayonnantes coupées par d'autres stries, mais circulaires, qui projettent au loin une multitude de gouttelettes.....

« Le niveau du liquide dans le tube s'abaissant continuellement, le diamètre de la nappe s'agrandit peu à

(1) *Mémoire sur le choc d'une veine liquide lancée contre un plan circulaire* (ANNALES DE CHIMIE ET DE PHYSIQUE DE PARIS, t. LIV, année 1833, p. 55).

peu; en même temps l'auréole change d'aspect, elle devient plus transparente, sa largeur diminue, elle se recouvre de larges bosselures, et enfin elle disparaît entièrement lorsque la pression à l'orifice n'est plus que d'environ 60 ou 62 centimètres. Alors la nappe atteint son diamètre maximum, qui est d'environ 80 centimètres, et elle se présente sous la forme d'une large capsule parfaitement unie, dont la concavité est tournée en bas, et dont le contour libre, légèrement dentelé, lance un grand nombre de gouttelettes qui partent des angles saillants des dentelures.

« La pression à l'orifice continuant toujours à décroître, la nappe unie que nous venons de décrire diminue graduellement de diamètre, mais en même temps elle se recourbe sur elle-même à sa partie inférieure, en se portant vers la tige qui soutient le disque, et, à la pression de 32 à 33 centimètres, elle se ferme entièrement en revêtant la forme d'un solide de révolution d'environ 40 centimètres de diamètre et 45 de hauteur, dont la surface est parfaitement unie et dont la génératrice ressemble beaucoup à une demi-lemniscate. »

Disons, en passant, que M. Tyndall, dans une leçon donnée, en 1854, à l'Institution Royale de Londres (1), a varié les formes de ces lames, en recevant la veine dans de petits cônes creux de différentes ouvertures; alors, quand la charge est modérée, les lames se façonnent de manière à figurer des vases.

§ 231. On comprend que le liquide, au moment où il vient frapper le disque, est dévié latéralement dans tous les azimuts, et de là doit résulter une tendance au déchirement suivant les prolongements des rayons du disque;

(1) *On some phenomena connected with the motion of liquids.* (Philos. Magaz., 4me série, vol. VIII, p. 74).

mais la cohésion s'oppose à ce déchirement, la viscosité met, de son côté, obstacle à ce que le liquide s'amincisse trop en certains endroits, et il y a conséquemment simple formation d'une lame continue. Ici donc, comme dans les cas précédemment étudiés, c'est encore la cohésion et la viscosité qui président au développement des lames.

Quant à l'auréole, qui ne se manifeste que sous de fortes charges, on peut conclure des observations contenues dans le Mémoire de Savart qu'elle est due à un mouvement vibratoire du liquide, résultant probablement du choc contre le disque.

On comprend également que, sous les fortes charges, la pesanteur ne peut produire d'inflexion bien sensible de la lame, le temps employé par les molécules liquides à aller du bord du disque à celui de la lame étant trop court; mais que, sous des charges plus faibles, il n'en est plus de même, et qu'ainsi la lame doit présenter alors la forme de capsule renversée.

Savart attribue à l'attraction moléculaire les effets qui surviennent quand la charge continue à diminuer, savoir le rétrécissement inférieur, puis la fermeture de la lame, mais il se borne à ce simple aperçu. Comme j'aurai à rappeler des faits de la même catégorie, je vais préciser davantage.

Lorqu'une lame liquide est courbe et que ses deux courbures principales sont de même sens, chacun de ses éléments exerce, nous le savons, une pression normale dirigée du côté de la concavité. D'après cela, dès que la lame ci-dessus s'infléchit sensiblement par l'action de la pesanteur, une nouvelle force, savoir la pression capillaire dont je viens de parler, prend naissance, augmente l'inflexion, et l'effet va en croissant à mesure que la vitesse de translation horizontale des molécules décroît,

jusqu'à ce qu'enfin la pression capillaire prédomine, et ferme complétement la lame.

Aussi, en premier lieu, toutes choses égales d'ailleurs, la lame se ferme sous une charge d'autant plus forte que l'orifice est plus petit : par exemple, avec un orifice de 18^{mm} de diamètre, la charge correspondante à la fermeture de la lame n'était que de 21 à 22 centimètres, tandis qu'elle était de plus de 5 mètres avec un orifice de $1^{mm},5$. Et, en effet, il est clair que plus l'orifice est grand, plus il amène de liquide dans le même temps, et conséquemment plus la lame doit avoir d'épaisseur; or la pression capillaire due aux courbures n'émanant que des deux couches superficielles de la lame, elle ne varie qu'avec les courbures et est indépendante de l'épaisseur; mais la masse à mouvoir étant proportionnelle à cette épaisseur, la pression capillaire en question produit nécessairement un effet d'autant plus prononcé que l'épaisseur est moindre, d'où il suit que, pour empêcher la lame de se fermer, il faut aussi une charge d'autant plus considérable.

En second lieu, avec les grands orifices, l'axe vertical des lames fermées l'emporte sur le diamètre de leur équateur, et le contraire a lieu avec les petits orifices; or cela doit être d'après ce qui précède, car plus la lame fermée est mince, plus la pression capillaire lutte avec avantage contre la pesanteur qui tend à abaisser le point inférieur de cette lame.

En troisième lieu, l'élévation de la température du liquide, en diminuant la cohésion, doit aussi diminuer la pression capillaire, de sorte que la lame se ferme sous une charge moindre, et c'est ce que l'expérience vérifie encore : par exemple, avec un orifice de 3^{mm} et un disque de 13^{mm} de diamètre, les charges correspondantes à la

fermeture de la lame aux températures de 4° et de 90°, étaient respectivement comme 1 à 0,29.

Enfin, comme on pouvait le prévoir, la nature du liquide exerce une influence considérable : dans une suite d'expériences comparatives faites, à la température de 8°, sur l'eau, l'alcool, l'éther sulfurique et le mercure, les charges correspondantes à la fermeture, évaluées toutes en colonnes d'eau, étaient approximativement comme les nombres 1, 0,9, 0,3 et 3.

§ 232. Le second Mémoire[1] auquel nous avons déja fait allusion (§ 153) concerne l'effet résultant du choc mutuel des parties continues de deux veines liquides lancées par des orifices circulaires dans des directions qui, au point de rencontre, sont exactement opposées. Les orifices étaient à 3 centimètres de distance l'un de l'autre; les charges pouvaient être portées jusqu'à près de 5 mètres; au point de rencontre, les directions des deux jets étaient horizontales; le liquide était de l'eau. Laissons encore Savart décrire lui-même les phénomènes généraux, pour le cas de charges égales et d'orifices égaux de 3^{mm} de diamètre.

« Il se formait, pour toutes les pressions, au point de rencontre des deux veines, c'est-à-dire au milieu de l'intervalle qui séparait les orifices, une nappe plane et circulaire plus épaisse à sa partie centrale qu'à son contour, dont le plan était normal à la tangente aux deux veines, et qui se terminait par une zone annulaire trouble, agitée et sonore, lorsque la pression excédait 120 centimètres, mais qui devenait parfaitement lisse et unie dans toute son étendue, lorsque la pression s'abaissait au-dessous

(1) *Mémoire sur le choc de deux veines liquides animées de mouvements directement opposés* (ANNALES DE CHIMIE ET DE PHYSIQUE DE PARIS, t. LV, année 1833, p. 257).

de ce point. Pour la pression la plus forte, qui était de 488 centimètres, le diamètre de cette nappe était d'abord de 24 à 25 centimètres; ensuite il s'accroissait peu à peu à mesure que la pression devenait plus faible, et quand elle n'était plus que de 115 à 120 centimètres, il était alors d'environ 38 centimètres; ensuite il décroissait de nouveau....... »

Et plus loin :

« Des orifices de 4^{mm} et ensuite de 6^{mm} ayant été substitués à ceux de 3^{mm}, des phénomènes analogues se sont offerts à l'observation, avec cette différence cependant, que le diamètre des nappes était d'autant plus grand, à pression égale, que celui des orifices était lui-même plus grand.

« Tant que la pression est forte et que les nappes sont entourées d'une auréole, elles paraissent sensiblement circulaires, et le point de rencontre des jets en occupe le centre; mais à mesure que la pression décroît, leur rayon vertical supérieur diminue de longueur, tandis qu'au contraire l'inférieur va en augmentant.... Pour les pressions inférieures à celles où l'auréole disparaît entièrement, les nappes sont constamment entourées d'un petit bourrelet arrondi d'où s'échappent une multitude de gouttelettes qui, en général, décrivent des courbes comprises dans le même plan vertical qui contient la nappe. »

Savart est conduit par ses observations aux deux lois suivantes :

Pour les mêmes orifices, le diamètre de la nappe sans auréole est sensiblement proportionnel à la simple charge, et, pour une même charge, quand elle est assez faible, il est sensiblement proportionnel à l'aire des orifices.

Avec des orifices inégaux, dont les diamètres sont comme 1 à 2 ou à 3, et pour des charges égales suffisam-

ment grandes, « il se forme une nappe conique dont le sommet est situé au point de rencontre des deux jets, au milieu de l'intervalle qui sépare les orifices, et dont la concavité est tournée du côté du jet du moindre diamètre. Lorsque la pression est suffisamment grande eu égard au diamètre des orifices, cette nappe se termine par une partie auréolée..... Lorsque la pression diminue, cette auréole s'efface peu à peu, le diamètre de la base de la nappe devient plus grand, et, après avoir atteint une certaine limite, il commence à décroître. La pression continuant toujours à diminuer, la nappe se ferme en affectant une forme qui se rapproche en général de celle d'un ellipsoïde allongé dont le grand axe est horizontal. »

§ 233. Les lames dont il s'agit dans ce second Mémoire se forment évidemment par les mêmes causes que celles du premier, et les auréoles peuvent également être attribuées à des mouvements vibratoires du liquide, provenant du choc ; on s'explique sans peine par l'action de la pesanteur la différence entre les rayons verticaux supérieur et inférieur pour des charges assez peu considérables ; on se rend de même raison de la forme conique des lames dans le cas des orifices inégaux et des fortes charges ; enfin, la surface de ces lames coniques étant courbe dans un sens, cette courbure doit aussi faire naître une pression capillaire, qui ferme la lame quand la vitesse est suffisamment réduite.

Nous avons vu (§ 153) que M. Hagen a indiqué la cause très-probable de la limitation des lames de ce même Mémoire lorsqu'elles sont sans auréole, et son explication convient évidemment aussi à la limitation des lames ouvertes du premier Mémoire ; pour compléter autant que possible la théorie des phénomènes, il faut encore rendre raison de la formation des gouttes qui s'échappent du

bord de toutes les lames dont il s'agit ; c'est ce que nous ferons dans le § 426.

Les auréoles qui se manifestent dans ces mêmes lames sous de fortes charges, et qui, ainsi que je l'ai fait remarquer, paraissent dues à des mouvements vibratoires, donneraient lieu aussi, sans doute, à une étude fort intéressante ; mais les observations de Savart sur ce sujet ne sont pas suffisamment complètes, et il faudrait soumettre le phénomène à des expériences nouvelles et plus détaillées ; le meilleur procédé à employer serait, je pense, celui que j'ai fait connaître le premier (1), et qui consiste à observer à travers un disque opaque percé de fentes radiales étroites et tournant sur lui-même avec une vitesse qu'on peut graduer à volonté.

§ 234. Magnus, dans la première partie de ses *Recherches hydrauliques* (2), publiée en 1855, décrit une suite d'expériences nouvelles et curieuses au moyen desquelles il oblige aussi un liquide à s'étaler en lames par l'effet du mouvement. Le savant physicien a eu l'idée de chercher ce qui se produit lorsque les parties continues de deux veines se rencontrent, non plus dans des directions opposées, mais en formant un angle entre elles. Résumons ici les faits les plus saillants parmi ceux qu'il a observés.

En premier lieu, avec deux veines d'eau horizontales dont les axes se coupent, et forment entre eux un angle d'environ 40°, des orifices égaux et une charge commune modérée, il se développe, à partir du point de rencontre, une première lame verticale allongée dans le sens du

(1) *Sur un nouveau moyen de déterminer la vitesse et les particularités d'un mouvement périodique très-rapide, tel que celui d'une corde sonore en vibration, etc.* (BULLET. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, 1836, t. III, p. 364).

(2) *Hydraulische Untersuchungen* (ANN. DE M. POGGENDORFF, vol. XCV, page 1).

mouvement général, et dont les bords supérieur et inférieur vont se rencontrer sous un certain angle à l'extrémité la plus éloignée; de cette extrémité part une seconde lame de forme analogue, mais ayant son plan perpendiculaire à celui de la première, puis vient une troisième lame, laquelle est de nouveau verticale, et, au delà, le liquide s'éparpille. Ces lames sont épaissies vers leurs bords, et il en résulte souvent des bourrelets nettement dessinés ; l'expérience dont il s'agit offre donc un nouvel exemple de bourrelets aux bords libres des lames liquides. Magnus ne parle point de gouttes lancées par ces bords, et si l'on consulte les figures qui accompagnent le Mémoire, on ne voit, en effet, de projection de gouttes représentée que près de l'extrémité de la troisième lame.

Magnus attribue la limitation de ces lames et leur forme allongée et pointue à la cohésion du liquide, laquelle tire d'une manière continue les deux bords l'un vers l'autre, et les oblige enfin à se rejoindre. L'explication sera plus précise si à la cohésion l'on substitue la tension des deux faces, et si l'on y ajoute la pression capillaire due à la courbure transversale des bords. Magnus rend raison de la succession des lames en remarquant que la rencontre de leurs bords épais ayant lieu sous un certain angle, elle doit faire naître un phénomène analogue à celui qui provient de la rencontre des deux veines elles-mêmes, c'est-à-dire le développement d'une lame faisant un angle droit avec le plan contenant les axes de ces bords.

En second lieu, les orifices étant toujours égaux et les vitesses égales et modérées, si les deux veines, au lieu de se rencontrer de manière que leurs deux axes se coupent, ne font que s'entamer mutuellement d'une petite

quantité, et si, en outre, l'angle qu'elles forment n'est que d'environ 35°, elles continuent leur course au delà du point de rencontre, avec une lame développée entre elles, et s'infléchissent de façon à aller s'entamer de nouveau plus loin ; puis la même chose se reproduit, et, dans des conditions favorables, il peut même arriver qu'elle se répète une troisième fois avant que le tout se réduise en gouttes; ajoutons cette particularité, que la veine qui, à la première rencontre se trouvait être la supérieure, devient l'inférieure à la deuxième rencontre, et ainsi de suite.

Magnus attribue encore simplement à la cohésion l'espèce de traction exercée par les lames interposées et qui ramène les veines l'une vers l'autre; nous dirons, comme dans le cas précédent, que l'effet est produit par la tension des deux faces de ces lames jointe à la pression capillaire due à la courbure transversale des parties extérieures des deux veines.

§ 235. On a vu que les lames de Savart, lorsqu'elles affectent des formes courbes et qu'on amoindrit suffisamment la vitesse du liquide, se ferment par l'effet des pressions capillaires qu'exercent tous les points de leurs deux faces en vertu des courbures de celles-ci. C'est au même genre de phénomène qu'appartient la singulière génération de bulles observée par mon fils Félix [1].

L'expérience consiste à lancer obliquement en l'air de l'eau de savon contenue dans une capsule, de manière à étaler le liquide en nappe ou lame; cette lame se déchire, en général, en plusieurs portions, dont chacune se ferme aussitôt pour constituer une bulle creuse complète, qui descend avec plus ou moins de lenteur. Quel-

(1) *Sur un mode particulier de production de bulles de savon* (Bullet. de l'Acad. de Belgique, 1862, 2e série, t. XIII, p. 286).

quefois on n'obtient qu'une seule bulle, qui peut alors atteindre 8 ou 9 centimètres de diamètre ; mais ordinairement il s'en forme plusieurs, et elles sont alors moins grosses.

La théorie du phénomène est fort simple, et se déduit de ce que j'ai exposé dans les paragraphes précédents. Considérons le cas où la lame ne se déchire pas, et produit conséquemment une bulle unique; ce que nous dirons à l'égard de cette lame pourra s'entendre également des lames partielles résultant du déchirement. Par les mêmes causes que dans les lames de Savart, causes que nous examinerons plus tard (§§ 426 et 427), au bord de la lame actuelle se forme nécessairement un bourrelet, qui se résout en petites masses isolées; mon fils a constaté, en effet, que ce bord est dentelé et laisse échapper des gouttes nombreuses. Dès qu'elle est développée, la lame commence à tomber en vertu de son poids; mais, par suite de la résistance de l'air, sa partie centrale descend beaucoup moins vite que son bord, le long duquel règne la masse du bourrelet, et elle prend ainsi une figure fortement bombée tournant sa convexité en haut; elle se trouve donc sensiblement dans les mêmes conditions que celles du premier Mémoire de Savart, la résistance de l'air contre sa partie centrale jouant ici le rôle du petit disque solide; et comme les pressions capillaires nées des courbures en tous les points des deux faces n'ont pas à lutter contre un mouvement de translation partant du centre, ces pressions ferment rapidement la lame par le bas, et la façonnent en une bulle sphérique complète.

Mon fils n'avait point réussi à obtenir de cette manière des bulles d'eau pure, parce qu'il opérait d'un point trop peu élevé; mais M. Van der Mensbrugghe(1), en lançant

(1) *Sur quelques effets curieux des forces moléculaires des liquides* (BULLET. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, 1864, 2e série, t. XVIII, p. 161).

le liquide d'une fenêtre d'un étage supérieur, a vu parfaitement l'eau pure donner des bulles complètes, et il est arrivé au même résultat avec l'alcool, l'essence de térébenthine, l'huile de pétrole, l'huile d'olive et plusieurs solutions salines ; il en conclut que la plupart des liquides, sinon tous, sont susceptibles de s'arrondir, par ce procédé, en bulles creuses.

Quant à mon hypothèse relative à la formation des vésicules de vapeur, hypothèse rapportée dans la Note de mon fils, et consistant à admettre que la vapeur gazeuse repasse à l'état liquide sous forme de lamelles isolées, et que ces lamelles, généralement courbes, se ferment comme les lames dont il vient d'être question, je l'abandonne aujourd'hui après un examen plus attentif; en effet, pour donner lieu à des vésicules aussi minimes que celles de la vapeur des nuages, il faudrait que les lamelles fussent elles-mêmes extrêmement petites, et dès lors elles ne tomberaient qu'avec une grande lenteur; on ne pourrait donc supposer une chute rapide de leurs bords libres et une influence énergique de la résistance de l'air sur le reste seulement. Ce qui arriverait au contraire à de semblables lamelles, c'est que les pressions capillaires dues aux courbures de leurs faces effaceraient ces courbures, et qu'en même temps les bords libres revenant sur eux-mêmes avec une excessive vitesse à cause de leur minceur, transformeraient instantanément les lamelles en de petits globules pleins.

§ 236. Les expériences ci-dessus m'ont suggéré l'idée d'un mode de réalisation de bulles un peu différent, mais fondé aussi sur la résistance de l'air. Un anneau en fil de fer de 7 centimètres de diamètre, par exemple, est fixé, par un point de son contour, à l'extrémité d'une tige droite dirigée suivant le prolongement d'un diamètre.

Tenant cet anneau par sa tige, on y développe une lame plane en le plongeant dans une bonne solution de savon de Marseille, et l'en retirant; puis on lui donne aussitôt dans l'air, avec une vitesse convenable, un mouvement de translation perpendiculaire à son plan. La résistance de l'air creuse alors la lame en arrière, et la transforme en une sorte de sac allongé, fortement renflé à sa partie postérieure, et présentant un étranglement dans le voisinage de l'anneau; enfin, par un petit ralentissement de la vitesse, l'étranglement se ferme, et une bulle, dont le diamètre peut être environ double de celui de l'anneau, se trouve isolée dans l'air. D'ordinaire la portion de l'étranglement qui s'appuie sur l'anneau éclate dès que cet étranglement s'est fermé; mais quelquefois elle va former dans l'anneau une nouvelle lame plane, et l'on peut alors obtenir une seconde bulle immédiatement après la première. Pour réussir dans cette expérience, il faut quelque habitude, car le succès dépend du plus ou moins de vitesse qu'on donne à l'anneau.

Le phénomène s'explique par les mêmes principes que la génération des bulles complètes au moyen d'une pipe (§ 228); en effet, que de l'air en mouvement soit dirigé contre une lame adhérante à un contour solide immobile, ou bien que ce contour avec sa lame soit transporté normalement à celle-ci dans de l'air immobile, les résultats doivent évidemment être analogues.

§ 237. Mentionnons encore la bizarre production de bulles signalée par MM. Minary et Sire[1].

L'expérience, telle que ces physiciens la décrivent, « consiste à verser dans une certaine quantité d'huile d'olive une fois et demie à deux fois son volume d'acide

(1) *Sur un mode particulier de formation de bulles liquides* (COMPTES RENDUS, 1862, t. LV, p. 515).

sulfurique concentré, et à agiter violemment le mélange à l'aide d'une baguette de verre.

« L'agitation étant pratiquée dans un verre à pied d'une capacité convenable, on ne tarde pas à voir s'élever du mélange une foule de petites bulles creuses qui voltigent dans tous les sens. Les plus grosses (qui atteignent parfois 1 à 2 centimètres de diamètre) retombent le plus souvent dans le mélange après une faible ascension; mais les plus petites s'élancent facilement dans l'air ambiant en trahissant ses agitations. Il se produit dans ces circonstances des bulles d'une grande ténuité, et d'autant plus nombreuses que l'agitation est plus violente et effectuée dans un certain sens qui paraît favoriser leur formation..... Le mélange huile et acide ne permet pas de souffler facilement des bulles à l'extrémité d'un tube évasé ; c'est à peine si l'on peut en produire de 1 à 2 centimètres de diamètre, qui d'ailleurs ne persistent pas. »

Je regarde comme impossible que les portions de gaz qui arrivent de l'intérieur du mélange ci-dessus puissent former à sa surface autre chose que des calottes sphériques laminaires, et soient capables de continuer à soulever la pellicule liquide de manière à compléter des bulles laminaires sphériques isolées dans l'air ; en effet, le gaz emprisonné a évidemment beaucoup trop peu de masse pour que l'inertie de son mouvement ascensionnel surmonte la pression capillaire exercée par la pellicule convexe qu'il détermine à la surface du mélange. Je n'ai pas fait répéter l'expérience de MM. Minary et Sire, et conséquemment je ne hasarderai aucune explication. Cette expérience ne me paraît pas sans danger, des gouttelettes acides pouvant être projetées dans les yeux de l'observateur ; il faut, je pense, regarder à travers un écran de verre.

§ 238. Il me reste à parler d'une dernière espèce de lames; elles sont formées, comme celles que nous avons passées en revue dans les §§ 230 à 235, par un liquide en mouvement; mais la cohésion et la viscosité ne jouent dans leur génération qu'un rôle secondaire, parce que les filets moléculaires dont on peut les regarder comme composées n'ont point de tendance à s'écarter les uns des autres. Telle est la veine lancée verticalement de haut en bas par un orifice en forme de fente rectiligne ou de rectangle allongé.

Ces lames présentent aussi des phénomènes remarquables; la veine ci-dessus, par exemple, se montre, on le sait, formée, jusqu'à une certaine distance de l'orifice, d'une suite de portions dont les plans ont des directions alternatives à angle droit les unes par rapport aux autres, comme dans la première des expériences citées au § 234, et le fait s'explique évidemment de la même manière : dès que la veine sort de l'orifice, les deux bords de la lame qu'elle constitue sont chassés l'un vers l'autre par les pressions capillaires dues à leurs fortes courbures transversales; il s'y forme donc des bourrelets, qui, venant à se rencontrer angulairement, obligent le liquide à s'épanouir dans un plan perpendiculaire, puis le même effet se produit dans cette seconde lame, et ainsi de suite. Magnus, qui a consacré une partie de ses recherches hydrauliques (1) aux veines lancées par des orifices non circulaires, rend raison du phénomène dont il s'agit ici par une théorie qui revient à la précédente.

§ 239. J'ai fait connaître, il y a longtemps (2), une

(1) Voir la note du § 234.

(2) *Note sur la figure de la nappe liquide qui s'écoule par une fente étroite, rectiligne et verticale, partant du fond d'un réservoir et s'élevant jusqu'au-dessus du niveau du liquide* (BULLET. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, 1836, t. III, p. 145).

expérience qui me semble curieuse en ce qu'elle montre aux yeux une grande lame liquide verticale dont l'un des bords libres, muni d'un bourrelet, est rectiligne et incliné à l'horizon. Elle consiste à faire écouler de l'eau par une fente verticale et rectiligne pratiquée dans la paroi latérale du vase, depuis un point voisin du fond de celui-ci jusqu'au-dessus du niveau du liquide. C'est le bord libre supérieur de la lame qui présente la forme indiquée; seulement il ne commence à paraître exactement droit qu'à partir d'une petite distance de son origine, c'est-à-dire du point de la fente correspondant au niveau de l'eau dans le vase, mais il conserve son aspect rectiligne jusqu'à la distance où le bourrelet qui le garnit est rencontré par le bord libre inférieur; l'angle qu'il fait avec l'horizon est d'un peu plus de 45°; le bourrelet, peu épais à son extrémité supérieure, va en grossissant à partir de là jusqu'à l'autre extrémité; telle est du moins l'apparence générale qu'il offre à la première observation; nous verrons plus loin que sa constitution réelle n'est pas si simple. Le bord inférieur de la lame est également garni d'un bourrelet, qui va aussi en grossissant à partir de son origine, mais qui est beaucoup moins volumineux que le premier; enfin ce bourrelet inférieur n'est pas dirigé exactement suivant la parabole que tracerait un filet liquide isolé partant de l'extrémité inférieure de la fente : il est moins descendant, et même, près de son origine, il commence par avoir une direction montante, de sorte qu'il va toujours rencontrer le bourrelet supérieur plus haut que ne le ferait la parabole en question.

La théorie rend raison de toutes ces particularités. Si, par la pensée, on substitue à la fente une suite d'ouvertures infiniment petites, infiniment rapprochées, et ran-

gées suivant une même verticale, si, en outre, on suppose que chacun des filets liquides lancés par ces ouvertures décrive exactement sa parabole sans être influencé ni par la résistance de l'air ni par les autres filets, et si l'on cherche quelle est l'enveloppe de toutes ces paraboles, on trouve sans peine que c'est une droite faisant avec l'horizon un angle de 45°. Passant de ces conditions fictives aux conditions réelles, et négligeant, pour un moment, l'effet des pressions capillaires au bord libre considéré, on comprend que rien n'empêche chaque filet de décrire la portion de sa parabole comprise entre le point d'où il s'échappe et celui où il va toucher la droite enveloppe; mais comme, pour continuer à suivre cette même parabole, le filet devrait descendre dans l'épaisseur de la lame à travers les filets inférieurs, ce qui est impossible, il se trouve contraint de longer tous ceux-ci, c'est-à-dire d'effectuer sa marche ultérieure dans la direction du bord libre. Ce bord libre doit donc affecter sensiblement la forme rectiligne trouvée pour les conditions fictives; mais les filets qui s'y rendent et s'y accumulent ainsi en quantité d'autant plus considérable qu'on s'éloigne davantage du point situé au niveau du liquide, doivent, indépendamment de l'action des pressions capillaires, former le long de ce même bord un bourrelet qui va en grossissant à partir de son extrémité supérieure.

De leur côté, les pressions capillaires doivent produire un effet sensible jusqu'à une petite distance de cette extrémité supérieure, car, près du haut de la lame, le bord libre n'a reçu encore que peu de filets, et la vitesse de projection du liquide est peu considérable ; dans l'espace dont il s'agit, ces pressions doivent donc refouler le bord libre et lui donner une courbure concave dans le sens longitudinal; mais, on le conçoit, l'effet doit être d'autant

moins prononcé que la fente est moins étroite, et c'est ce que vérifie l'expérience, comme on le verra bientôt ; avec une fente de 2^{mm} de largeur, la courbure concave s'étend tout au plus à un centimètre et demi de distance[1]. Quant au bourrelet du bord libre inférieur, on comprend qu'il est dû presque entièrement à la pression capillaire, et l'on s'explique sans peine, d'après cela, son relèvement près de la fente, ainsi que son moindre volume. Enfin si, dans l'expérience, l'angle que fait le bord libre supérieur avec l'horizon excède un peu 45°, on peut l'attribuer, je pense, à la tension des deux faces de la lame.

Mon appareil consiste en un réservoir cylindrique de 50 centimètres de diamètre et 54 de hauteur; la fente, dont la hauteur est de 49 centimètres, est constituée par un intervalle entre les bords en regard de deux règles de fer épaisses, réunies par une traverse à chacune de leurs extrémités; ces bords sont taillés en biseau du côté qui regarde l'intérieur du vase.

J'ai répété l'expérience avec des fentes de différentes largeurs, et j'ai reconnu que la largeur la plus convenable était de 2^{mm} environ ; quand la fente est notablement plus étroite, la pression capillaire au haut de celle-ci est tellement énergique, qu'elle empêche la sortie du liquide jusqu'à une certaine distance au-dessous du niveau : avec une fente de $\frac{1}{3}$ de millimètre à peu près, le liquide est retenu ainsi sur une longueur d'environ six centimètres, et c'est seulement du bas de cette distance que part le bord libre supérieur de la lame ; en outre, avec une fente trop étroite, le bord libre inférieur se relève

(1) A l'époque où j'ai publié ma Note, j'avais moins étudié qu'aujourd'hui les actions capillaires ; aussi ai-je donné, dans cette même Note, une explication erronée de la courbure concave dont il s'agit.

beaucoup, de manière que la portion rectiligne du bourrelet supérieur se trouve considérablement raccourcie. Avec une fente de 2^{mm} de largeur, la résistance à la sortie du liquide ne s'est plus manifestée, le bord libre inférieur ne se relevait plus qu'assez faiblement près de son origine, et l'on a pu constater la forme rectiligne du profil du bourrelet supérieur sur une longueur de 75 centimètres environ.

Je dois insister sur la nature des deux bourrelets. Celui du bord libre inférieur est transparent, presque uni, et ressemble à une tige de cristal courbe; mais celui du bord supérieur présente une constitution fort singulière : à partir du milieu de sa longueur à peu près (toujours avec une fente de 2^{mm}), ses deux parties latérales se convertissent chacune en une gerbe de gouttelettes, et la partie intermédiaire se montre trouble, comme si elle-même était formée de gouttes en mouvement; si l'on regarde avec attention la portion de ce même bourrelet comprise entre l'origine de celui-ci et le lieu où s'opère la résolution en gouttes, on constate qu'elle est striée longitudinalement, quoique d'une manière un peu confuse. Nous reviendrons (§ 446) sur cette constitution.

Ainsi qu'on peut le voir dans une addition à ma Note(1), Le François a généralisé la question par l'analyse, dans l'hypothèse des filets exactement paraboliques et indépendants entre eux, en supposant la paroi du vase inclinée, et la fente percée suivant la direction de la plus grande pente. Il est arrivé ainsi à des résultats curieux, parmi lesquels je me bornerai à citer les suivants : 1° quelle que soit l'inclinaison de la paroi, le bord libre de la lame, celui, bien entendu, qui part du

(1) BULLET. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, 1836, t. III, p. 222.

niveau, est toujours rectiligne; 2° pour une inclinaison donnée de la paroi, si l'on imagine que le liquide soit placé alternativement d'un côté puis de l'autre de cette paroi, les bords libres droits respectivement correspondants à ces deux cas sont toujours perpendiculaires entre eux.

§ 240. Aucun liquide n'étant exempt de cohésion et de viscosité, il suit de notre théorie que tous doivent être susceptibles de se convertir en lames minces. Et, en effet, nous avons vu, dans les expériences de Savart, l'eau, l'alcool, l'éther et le mercure s'étendre en de semblables lames; nous avons vu de même l'eau, l'alcool, l'essence de térébenthine, l'huile de pétrole et l'huile d'olive, dans l'expérience de M. Van der Mensbrugghe, s'arrondir en bulles creuses complètes; enfin M. Gladstone, dans une Note dont il sera question bientôt, affirme que tous les liquides donnent, par l'agitation, des calottes laminaires à leur surface.

Ajoutons qu'avec la plupart des liquides, sinon avec tous, les lames peuvent, par l'emploi de moyens appropriés, acquérir des dimensions considérables; c'est ce que montrent, par exemple, les lames de Savart, que je viens de rappeler.

FIN DU TOME PREMIER.

TABLE ANALYTIQUE

DES

MATIÈRES DU TOME PREMIER.

CHAPITRE PREMIER.

Notions préliminaires. Condition générale à laquelle doit satisfaire, dans l'état d'équilibre, la surface libre d'une masse liquide supposée sans pesanteur. — Procédés pour soustraire un liquide à l'action de la pesanteur, en le laissant libre, soit sur toute sa surface, soit sur une partie de celle-ci, d'obéir à ses propres attractions moléculaires. — Emploi du premier procédé : sphère liquide ; vérifications expérimentales des principes de la théorie de l'action capillaire. — Figures terminées par des surfaces planes : polyèdres liquides.

CHAPITRE II.

Considérations relatives aux figures d'équilibre en général. Figures d'équilibre de révolution : sphère, plan, cylindre, onduloïde, caténoïde, nodoïde; étude expérimentale à l'aide du premier procédé; résultats des géomètres.

CHAPITRE III.

Deuxième procédé; démonstration. — Liquide donnant des lames d'une très-grande persistance. — Réalisation, au moyen des lames, des figures d'équilibre de révolution. — Pression exercée par une lame sphérique sur l'air qu'elle contient. — Recherche d'une limite supérieure très-petite du rayon d'activité sensible de l'attraction moléculaire.

CHAPITRE IV.

Figures d'équilibre qui ne sont pas de révolution. Principe général concernant la réalisation des surfaces à courbure moyenne nulle. Résultats des géomètres et vérifications expérimentales.

CHAPITRE V.

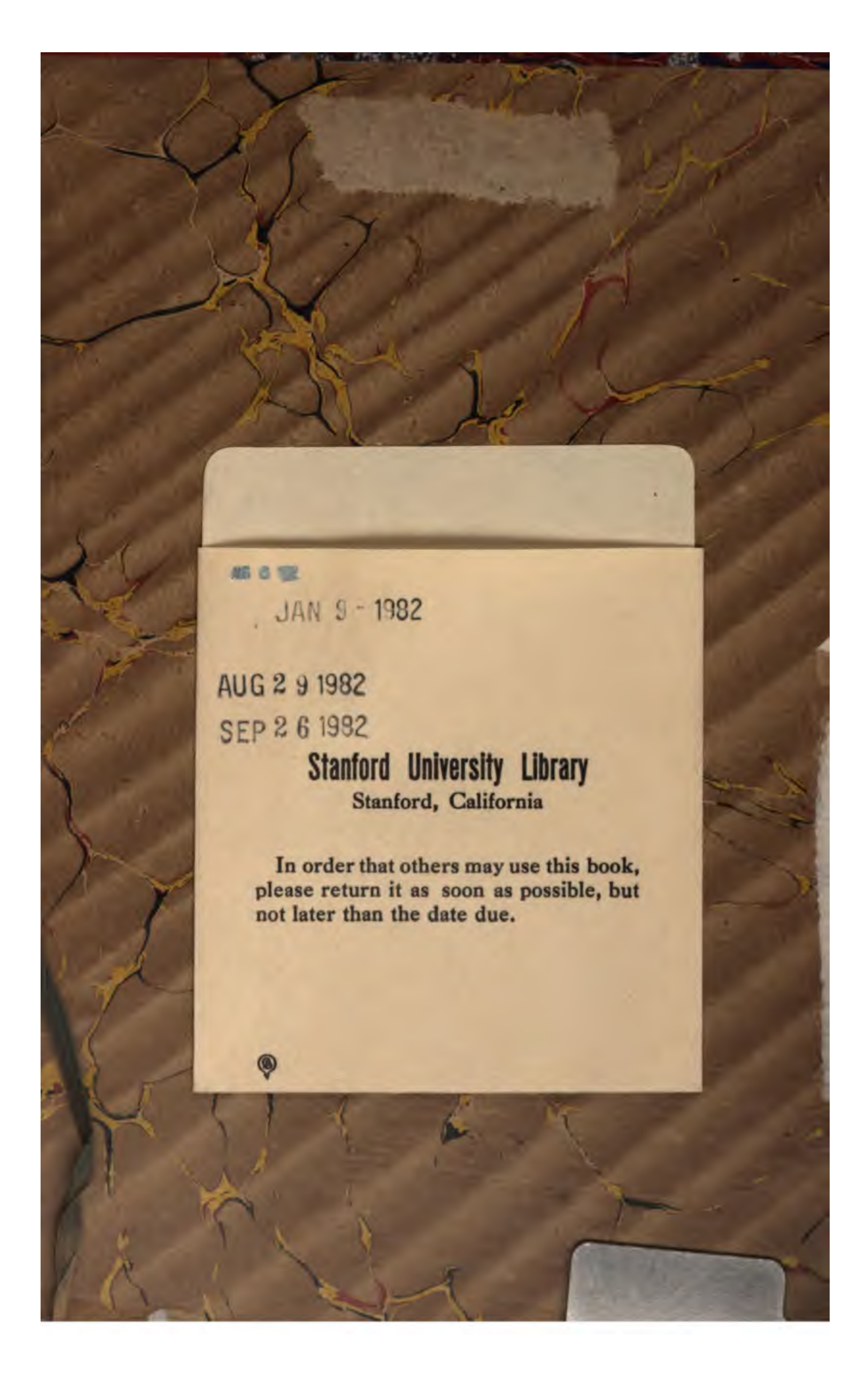
Tension des surfaces et des lames liquides ; historique. — Systèmes laminaires. Lois auxquelles ils sont soumis; comment ils se développent; principe général qui régit leur constitution. Démonstration théorique de leurs lois.

CHAPITRE VI.

Théorie de la génération des lames liquides ; moyens différents de produire ces lames ; particularités qu'elles présentent suivant le procédé employé pour les développer.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME PREMIER.




JAN 9 - 1982
AUG 29 1982
SEP 26 1992
Stanford University Library
Stanford, California
In order that others may use this book, please return it as soon as possible, but not later than the date due.

